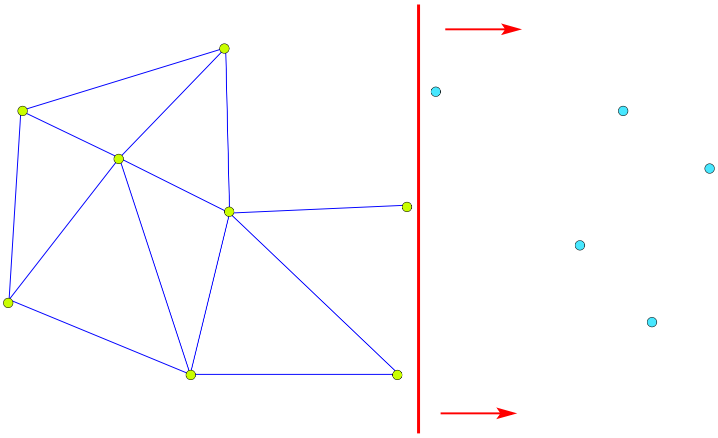
9. Juni 2010

7. Übung

1. **Aufgabe**:

   Wir wollen die Delaunay-Triangulation einer Punktmenge P mit n Punkten via Plane-Sweep und Beach Line direkt berechnen, also ohne zunächst das Voronoi Diagramm zu bestimmen. Welche Aktionen sind bei Site Events, welche bei Circle Events auszuführen?

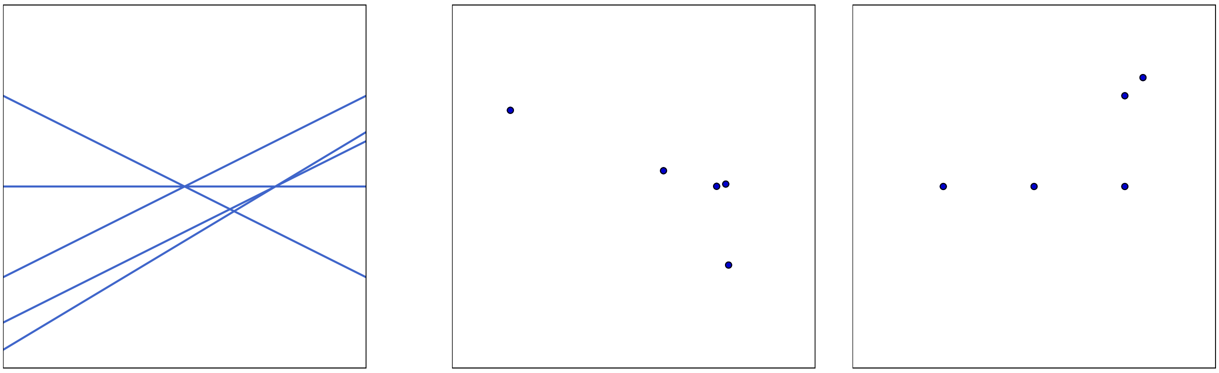


2. **Aufgabe**:

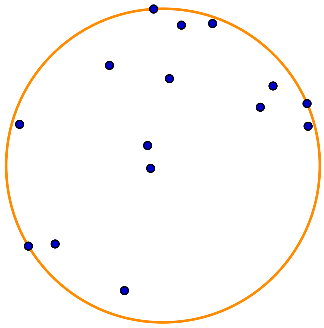
   Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

$$\begin{aligned} p = (p_x, p_y) \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(p) : Y = p_x \cdot X - p_y \\ \ell : Y = aX + b \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(\ell) = (a, -b) \end{aligned}$$

   Welche der beiden rechts abgebildeten Konfigurationen von fünf Punkten ist unter dieser Dualität dual zu der links abgebildeten Konfiguration von fünf Geraden. Begründen Sie ihre Antwort.



3. **Aufgabe**:

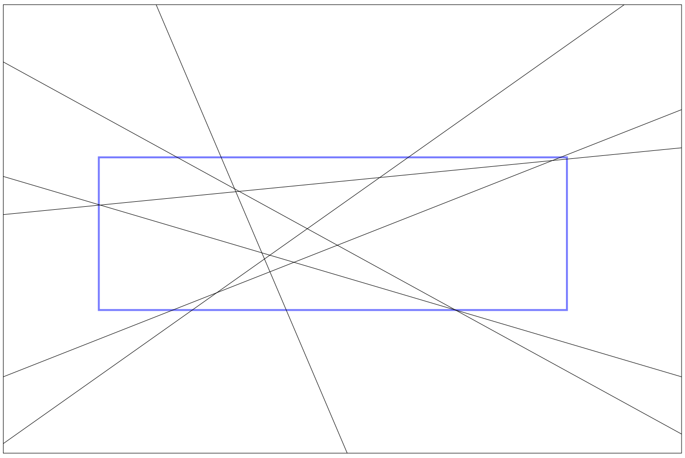


Sei S eine Menge von n Punkten in der Ebene, die so liegen, dass der kleinste S einschließende Kreis durch genau drei Punkte aus S bestimmt wird. Es liegen also auf diesem Kreis genau drei Punkte aus S, alle übrigen Punkte aus S liegen im Kreisinneren.

Wir betrachten die Punkte in zufälliger Reihenfolge (jede Reihenfolge ist gleichwahrscheinlich) und fügen sie einen nach dem anderen hinzu und berechnen jeweils den kleinsten Kreis, der alle bislang betrachteten Punkte einschließt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der kleinste S einschließende Kreis erst bei Hinzufügen des letzten Punktes gefunden, d.h., zum ersten Mal berechnet wird? Begründen Sie ihre Antwort.

4. **Aufgabe**:

Sei L eine Menge von n Geraden in der Ebene. Sie dürfen annehmen, dass sich die Geraden in allgemeiner Lage befinden, d.h. hier, dass es in L weder horizontale noch vertikale Geraden gibt. Geben Sie einen $O(n \log n)$ Algorithmus an, der ein achsenparalleles Rechteck berechnet, das alle Schnittpunkte der Geraden in L enthält.



5. **Aufgabe**:

Sei S eine Menge von n Punkten in der Ebene und sei V die Menge der Eckpunkte der konvexen Hülle $CH(S)$. Für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ sei $FP(p)$ ein Punkt aus S, der am weitesten von p entfernt ist. Zeigen Sie, dass $\{FP(p) \mid p \in \mathbb{R}^2\} \subseteq V$ ist.