OTTO-VON-GUERICKE-UNIVERSITÄT MAGDEBURG

Fakultät für Informatik

Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

25. Februar 2009, 9:00 - 11:00 Uhr

Bearbeitungszeit:	120 Minuten	Gesamtzahl Aufgaben:	7
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!	Gesamtpunktzahl:	52

Bearbeiter:

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________________

Bitte beschriften Sie jeden Doppelbogen mit Ihrer Matrikelnummer und Ihrem Namen!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Aufgabe 1 (12 PUNKTE)

Um in den Zeiten der Finanzkrise Geld von der Regierung bekommen zu können, möchte ein Unternehmen Mitarbeiter entlassen und nur die „besten“ behalten. Als Kriterien werden das Gehalt und eine Produktivitätskennzahl herangezogen. Ein Mitarbeiter ist „gut“, wenn sein Gehalt klein und seine Produktivitätskennzahl groß ist. Wir identifizieren nun Mitarbeiter mit ihren Kenngrößen Gehalt und Produktivitätskennzahl. Ein Mitarbeiter entspricht dann einem Punkt in der Ebene, wobei die x-Koordinate dem Gehalt und die y-Koordinate der Produktivitätskennzahl entspreche.

Gesucht sind nun die pareto[1]-optimalen Mitarbeiter des Unternehmens: Ein Mitarbeiter $m = (m_x, m_y)$ ist pareto-optimal, wenn es keinen anderen Mitarbeiter $b = (b_x, b_y)$ im Unternehmen gibt, der bezüglich eines der beiden Kriterien echt besser und bezüglich des anderen Kriteriums mindestens genauso gut ist wie m. Was bedeutet dies geometrisch?

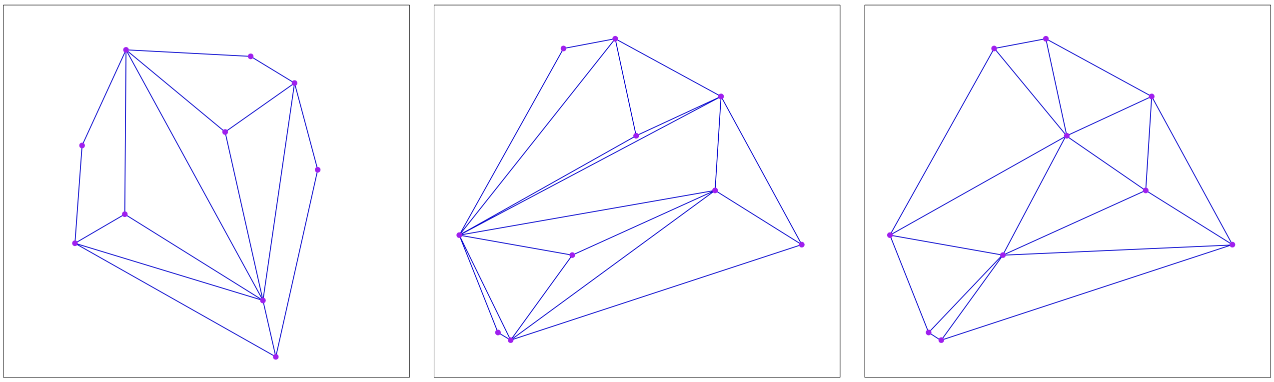
Sei nun $\mathscr{M}$ eine Menge von n Mitarbeitern. Die Koordinaten der Mitarbeiter in $\mathscr{M}$ seien bekannt. Geben Sie einen Algorithmus an (Plane-Sweep oder Teile-und-Herrsche), mit dem das Unternehmen die pareto-optimalen Mitarbeiter in Zeit $O(n \log n)$ bestimmen kann. Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Begründen Sie kurz die Korrektheit ihres Algorithmus.

Aufgabe 2 (7 PUNKTE)

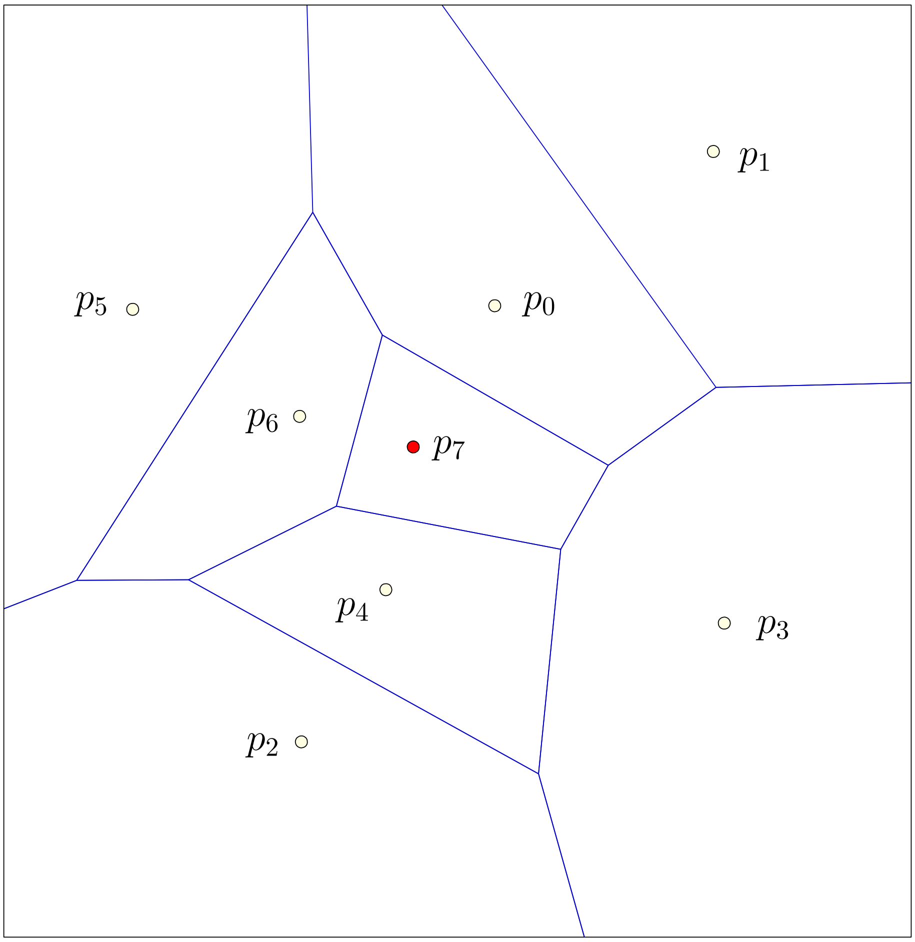
Sei S eine Menge von n Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage, d.h., es gibt keine 3 Punkte aus S, die auf der gleichen Geraden liegen. Geben Sie einen Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der eine beliebige Triangulation von S in Zeit $O(n \log n)$ berechnet. Zur Laufzeit und zur Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie nichts zu sagen.

[1] benannt nach Vilfredo Pareto, nach dem auch Geb. 22 (FWW) unserer Universität benannt ist.

Aufgabe 3 (9 PUNKTE)
Bei welchen der folgenden Kantenmengen handelt es sich jeweils um die Delaunay-Triangulation der Eckpunkte der Kanten, bei welchen nicht? Begründen Sie ihre Antworten.



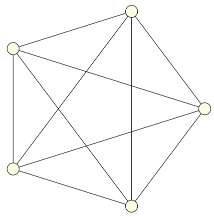
Aufgabe 4 (5 PUNKTE)
In der folgenden Abbildung ist das Voronoi-Diagramm (genau genommen, ein Ausschnitt aus dem Voronoi-Diagramm) einer Menge $\{p_0, \ldots, p_7\}$ von 8 Punkten zu sehen. Skizzieren Sie (in diese Abbildung) das Voronoi-Diagramm der Punktmenge $\{p_0, \ldots, p_6\}$, also das Voronoi-Diagramm, das nach Entfernen von p_7 entsteht.



Aufgabe 5 (8 PUNKTE)

(a) Ein zusammenhängender eingebetteter planarer Graph mit n Knoten, e Kanten und f Flächen erfüllt die Euler-Formel $n - e + f = 2$. Beweisen Sie, dass ein (zusammenhängender) einfacher planarer Graph mit n Knoten maximal $3n - 6$ Kanten besitzt.

(b) Beweisen Sie, dass der K_5, der vollständige Graph mit 5 Knoten, nicht planar ist.



Aufgabe 6 (6 PUNKTE)

Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

$$\begin{aligned} p = (p_x, p_y) \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(p) : Y = -p_x \cdot X + p_y \\ \ell : Y = aX + b \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(\ell) = (a, b) \end{aligned}$$

Sei P eine Menge von k Punkten, die alle auf einer nicht-vertikalen Geraden liegen.
Ferner sei $L = \{\mathscr{D}(p) \mid p \in P\}$ die Menge der zu den Punkten in P dualen Geraden und $\mathcal{A}(L)$ das Arrangement der Geraden in L.

(a) Aus wie vielen Knoten besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(b) Aus wie vielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(c) Aus wie vielen Zellen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

Aufgabe 7 (5 PUNKTE)

Im Folgenden sei $A[1..n]$ ein Feld von Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage. Bestimmen Sie eine möglichst gute asymptotische obere Schranke für die Laufzeit im schlechtesten Fall für den folgenden ineffizienten(!) Algorithmus, der die Kanten der konvexen Hülle (jeweils im Gegenuhrzeigersinn gerichtet) bestimmt:

```
HULLEDGES(A, n)
for i ← 1 to n
    do for j ← 1 to n
           do if (i ≠ j)
                then ok ← true;
                     for k ← 1 to n
                         do if (A[k] liegt rechts von der Geraden ℓ(A[i], A[j]))
                              then ok ← false;
                     if (ok)
                       then gib die Strecke A[i]A[j] a us
```