Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

24. Februar 2010, 11:15 - 13:15 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

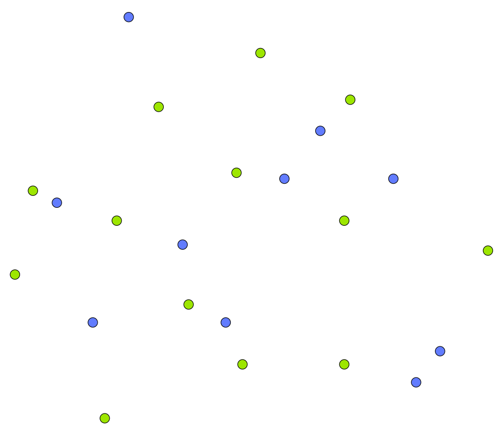
Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	7
Gesamtpunktzahl:	50

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7

Aufgabe 1 (12 PUNKTE)

Gegeben seien eine Menge B von n blauen Punkten und eine Menge G von n grünen Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage, d.h., mit paarweise verschiedenen x-Koordinaten und paarweise verschiedenen y-Koordinaten. Ein Punkt p liegt *westlich* von einem Punkt q, falls $p_x < q_x$ und *südwestlich* von q, falls $p_x < q_x$ und $p_y < q_y$.



(a) Geben Sie einen asymptotisch möglichst effizienten Algorithmus an, der alle blauen Punkte bestimmt, für die es höchstens einen grünen Punkt gibt, der südwestlich des blauen Punktes liegt. Welche asymptotische Laufzeit erreicht ihr Verfahren? Zur Korrektheit brauchen Sie nichts zu sagen.

(b) Geben Sie einen asymptotisch möglichst effizienten Algorithmus an, der alle blauen Punkte bestimmt, für die es höchstens einen grünen Punkt gibt, der westlich des blauen Punktes liegt. Welche asymptotische Laufzeit erreicht ihr Verfahren? Wieso ist ihr Verfahren korrekt?

Aufgabe 2 (8 PUNKTE)

(a) Ein zusammenhängender einfacher planarer Graph mit n Knoten, e Kanten und f Flächen erfüllt die Euler-Formel

$$n - e + f = 2$$

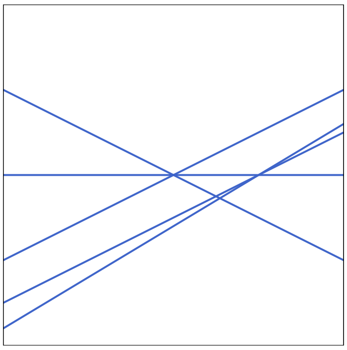
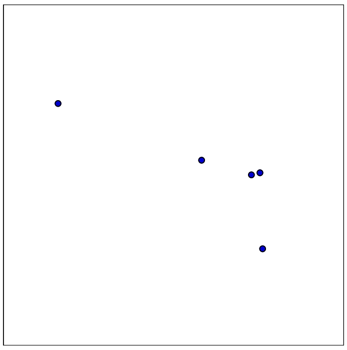
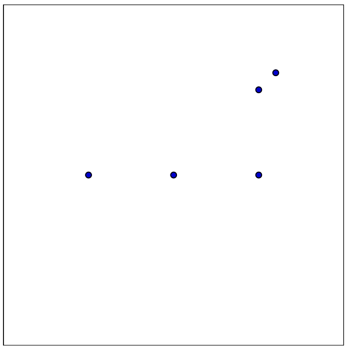
Beweisen Sie, dass ein (zusammenhängender) einfacher planarer Graph mit n Knoten maximal $3n - 6$ Kanten besitzt.

(b) Der Grad eines Punktes p in einer Triangulation einer Punktmenge ist die Anzahl der Kanten, die in p enden. Zeigen Sie, dass es in jeder Delaunaytriangulation einen Knoten vom Grad höchstens 5 gibt.

Aufgabe 3 (5 PUNKTE)
Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

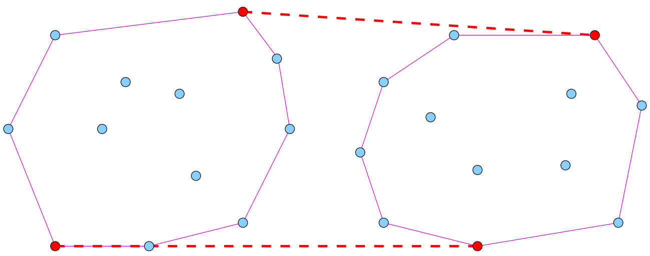
$$\begin{aligned} p = (p_x, p_y) \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(p) : Y = p_x \cdot X - p_y \\ \ell : Y = aX + b \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(\ell) = (a, -b) \end{aligned}$$

Welche der beiden rechts abgebildeten Konfigurationen von fünf Punkten ist unter dieser Dualität dual zu der links abgebildeten Konfiguration von fünf Geraden. Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 4 (10 PUNKTE)

(a) Geben Sie einen Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der die konvexe Hülle $CH(S)$ einer Menge S von n Punkten in der Ebene in Zeit $O(n \log n)$ berechnet. Zur Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie nichts zu sagen.



(b) Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht.
(*Hinweis:* Falls Sie in Teil (a) keinen Algorithmus angeben können, so sollten Sie hier zumindest die Rekursionsgleichung für die Laufzeit $T(n)$ aufstellen und dann nachweisen, dass $T(n) = O(n \log n)$ gilt.)

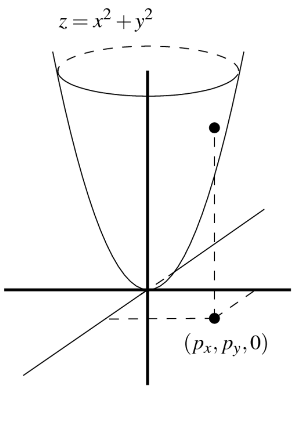
Aufgabe 5 (4 PUNKTE)

Sei $\mathscr{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$(x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2)$$

Sei P eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene und $\mathscr{L}(P)$ die Menge der Bildpunkte von P unter der Abbildung $\mathscr{L}$.

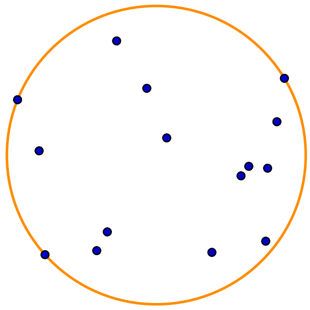
Clemens Clever behauptet, dass die konvexe Hülle $CH(\mathscr{L}(P))$ der Bildpunkte von P im $\mathbb{R}^3$ mindestens so viele Kanten enthält wie jede Triangulierung von P in der Ebene. Hat er recht? Begründen Sie ihre Antwort.



[Source: de Berg et al.]

Aufgabe 6 (4 PUNKTE)

Sei S eine Menge von n Punkten in der Ebene, die so liegen, dass der kleinste S einschließende Kreis durch genau drei Punkte aus S bestimmt wird. Es liegen also auf diesem Kreis genau drei Punkte aus S, alle übrigen Punkte aus S liegen im Kreisinneren.
Wir betrachten die Punkte in zufälliger Reihenfolge (jede Reihenfolge ist gleichwahrscheinlich) und fügen sie einen nach dem anderen hinzu und berechnen jeweils den kleinsten Kreis, der alle bislang betrachteten Punkte einschließt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der kleinste S einschließende Kreis erst bei Hinzufügen des letzten Punktes gefunden, d.h., zum ersten Mal berechnet wird? Begründen Sie ihre Antwort.



Aufgabe 7 (7 PUNKTE)
Wir betrachten Furthest-Point-Voronoidiagramme: Sei S eine Punktmenge in der Ebene. Wie üblich bezeichne $\mathrm{dist}(p, q)$ den Abstand der Punkte p und q. Für $s \in S$ ist die Menge

$$FPVR_S(s) := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{dist}(p, s) \geq \mathrm{dist}(p, t) \text{ für alle } t \in S\}$$

die Furthest-Point-Voronoiregion von s. Die durch die Furthest-Point-Voronoiregionen der Punkte in S gegebene Unterteilung der Ebene ist das Furthest-Point-Voronoidiagramm von S.

(a) Skizzieren Sie die konvexe Hülle der Punkte in der folgenden Abbildung.

(b) Skizzieren Sie das Furthest-Point-Voronoidiagramm, also die Ränder der Furthest-Point-Voronoiregionen, der Punkte innerhalb des umschließenden Rechtecks.