Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

9. Juli 2010, 10:15 - 12:15 Uhr

Name, Vorname: ____________________________

Matrikelnummer: ____________________________

Anzahl Doppelbögen: ____________________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	6
Gesamtpunktzahl:	56

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6

Aufgabe 1 (10 PUNKTE)

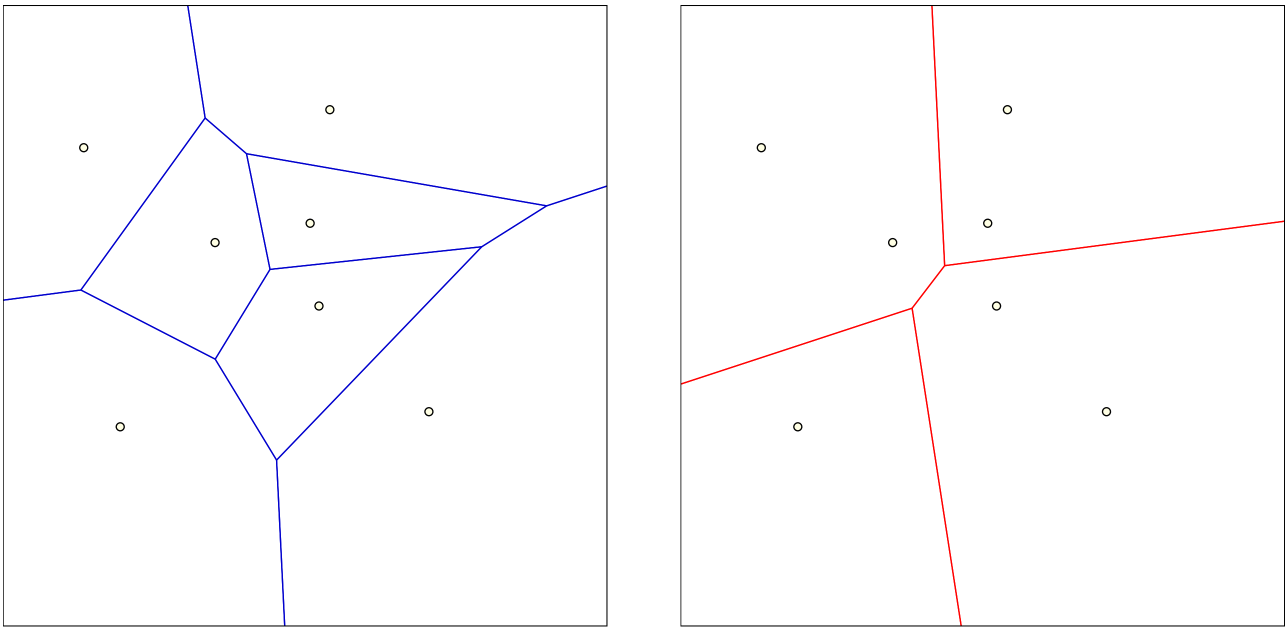
(a) Wie lautet die Eulerformel für zusammenhängende planare Graphen?

(b) Sei nun G ein zusammenhängender einfacher kreuzungsfrei eingebetteter Graph mit $n \geq 3$ Knoten, von denen jeder Grad mindestens 2 habe. Ferner gebe es in der Einbettung von G kein Gebiet gibt, das von nur 3 Kanten begrenzt wird.

   (i) Beweisen Sie, dass G höchstens $2n - 4$ Kanten hat.

   (ii) Zeigen Sie, dass es in G einen Knoten vom Grad kleiner als 4 gibt.

Aufgabe 2 (12 PUNKTE)



Obige Abbildung zeigt im linken Teil einen Ausschnitt aus dem Voronoidiagramm einer Menge P von 7 Punkten und im rechten Teil einen Ausschnitt aus dem Furthest-Point-Voronoidiagramm der gleichen Punktmenge.

(a) Zeichnen Sie die Delaunay-Triangulierung von P in den linken Teil der Abbildung ein.

(b) Zeichnen Sie die Furthest-Point-Delaunay-Triangulierung von P in den rechten Teil der Abbildung ein.

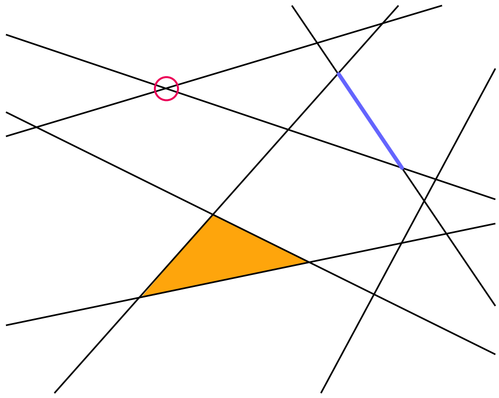
(c) Wir betrachten die Lifting-Map $\mathscr{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $(x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2)$. Sei $\mathscr{L}(P)$ die Menge der Bildpunkte von P unter der Abbildung $\mathscr{L}$. Von wie vielen Dreiecksflächen wird die konvexe Hülle $CH(\mathscr{L}(P))$ im $\mathbb{R}^3$ begrenzt? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 3 (10 PUNKTE)
Sei L eine Menge von n Geraden in allgemeiner Lage in der Ebene. Ferner bezeichne $\mathcal{A}(L)$ das Arrangement der Geraden in L.

(a) Aus wie vielen Knoten besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

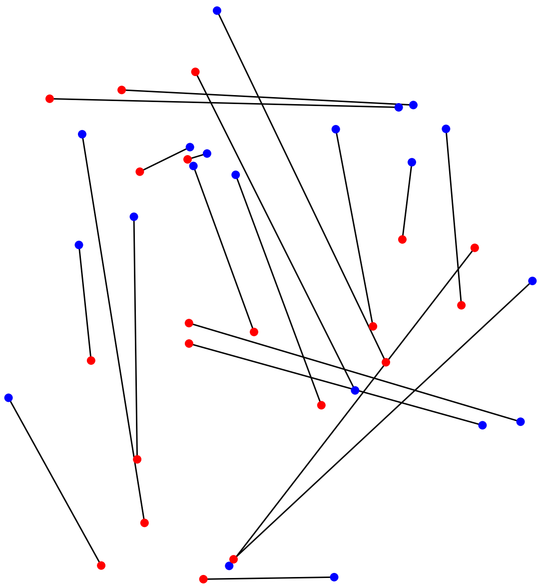
(b) Aus wie vielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(c) Aus wie vielen Zellen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)



(d) Wir konstruieren $\mathcal{A}(L)$ randomisiert inkrementell: Zunächst permutieren wir die Eingabefolge der Geraden zufällig und konstruieren $\mathcal{A}(L)$, in dem wir die Geraden in der durch die Permutation bestimmten Reihenfolge eine nach der anderen zum bisher konstruierten Arrangement hinzufügen. Alle Permutationen seien gleichwahrscheinlich. Wir betrachten einen beliebigen, aber festen Knoten v des Arrangements $\mathcal{A}(L)$. Wie wahrscheinlich ist es, dass v erst beim Hinzufügen der letzten Geraden entsteht? Begründen Sie ihre Antwort.

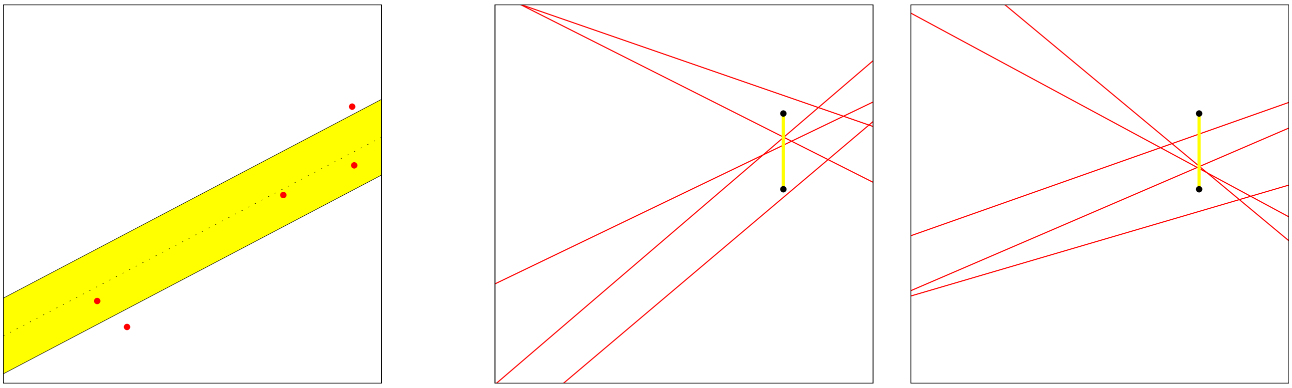
Aufgabe 4 (10 PUNKTE)
Sei S eine Menge von n Strecken in der Ebene. Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ testet, ob die Strecken in S paarweise disjunkt sind. Sie brauchen also keine Schnittpunkte zu berechnen!
Sie dürfen annehmen, dass sich die Strecken in „allgemeiner Lage“ befinden, d.h., alle Streckenendpunkte haben paarweise verschiedene x-Koordinaten. Insbesondere gibt es also keine vertikalen Strecken. Begründen Sie die Laufzeit und die Korrektheit ihres Algorithmus.



Aufgabe 5 (5 PUNKTE)
Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

$$\begin{aligned} p = (p_x, p_y) \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(p) : Y = p_x \cdot X - p_y \\ \ell : Y = aX + b \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(\ell) = (a, -b) \end{aligned}$$

Welche der beiden rechts abgebildeten Konfigurationen von fünf Geraden ist unter dieser Dualität dual zu der links abgebildeten Konfiguration von fünf Punkten. Die beiden links abgebildeten Geraden mit gleicher Steigung (und die dazu dualen Punkte rechts) dienen der Orientierung. Begründen Sie ihre Antwort.



Aufgabe 6 (9 PUNKTE)

(a) Geben Sie den QUICKHULL-Algorithmus zum Berechnen der konvexen Hülle einer Punktmenge an. Zur Korrektheit des Algorithmus brauchen Sie nichts zu sagen!

(b) Sei n die Anzahl der Elemente der Punktmenge und h die Anzahl der Extrempunkte. Zeigen Sie, dass die Laufzeit des QUICKHULL-Algorithmus in $O(nh)$ ist.