Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

24. Februar 2011, 10:15 - 12:15 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	6
Gesamtpunktzahl:	46

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6

Aufgabe 1 (6 PUNKTE)

Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

$$\begin{aligned} p = (p_x, p_y) \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(p) : Y = -p_x \cdot X + p_y \\ \ell : Y = aX + b \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(\ell) = (a, b) \end{aligned}$$

Sei P eine Menge von k Punkten, die alle auf einer nicht-vertikalen Geraden liegen.
Ferner sei $L = \{\mathscr{D}(p) \mid p \in P\}$ die Menge der zu den Punkten in P dualen Geraden und $\mathcal{A}(L)$ das Arrangement der Geraden in L.

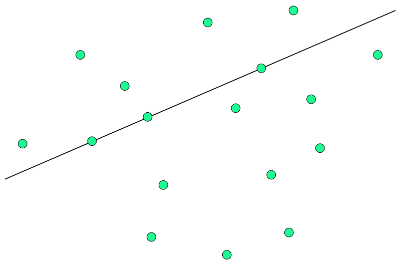
(a) Aus wie vielen Knoten besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(b) Aus wie vielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(c) Aus wie vielen Zellen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

Aufgabe 2 (8 PUNKTE)

Geben Sie einen Algorithmus an, der für eine gegebene Menge P von n Punkten in Zeit $O(n^2)$ entscheidet, ob P drei kollineare Punkte enthält, also drei Punkte, die auf einer Geraden liegen. Sie dürfen hierbei auf alle Algorithmen aus der Vorlesung zurückgreifen, ohne diese nochmals im Detail beschreiben zu müssen. Begründen Sie die Laufzeit ihres Algorithmus.



Aufgabe 3 (8 PUNKTE)

Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ eine Menge von n Punkten in allgemeiner Lage im dreidimensionalen Raum und sei $CH(P)$ die konvexe Hülle von P, also das kleinste konvexe Polytop, das alle Punkte in P enthält. Sei v die Anzahl der Eckpunkte, e die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Seitenflächen von $CH(P)$. Es gilt die Euler-Formel $v - e + f = 2$.

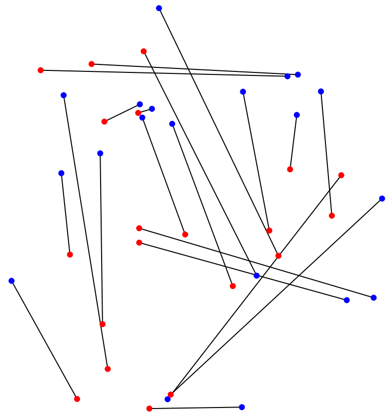
(a) Zeigen Sie, dass $CH(P)$ maximal $3n - 6$ Kanten besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass $CH(P)$ einen Eckpunkt mit weniger als 6 inzidenten Kanten besitzt.

Aufgabe 4 (10 PUNKTE)

Sei S eine Menge von n Strecken in der Ebene. Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ testet, ob die Strecken in S nicht paarweise disjunkt sind, also ob es ein Paar (s, t) von Strecken aus S gibt mit $s \cap t \neq \emptyset$. Sie brauchen keine Schnittpunkte zu berechnen!

Sie dürfen annehmen, dass sich die Strecken in „allgemeiner Lage“ befinden, d.h., alle Streckenendpunkte haben paarweise verschiedene x-Koordinaten. Insbesondere gibt es also keine vertikalen Strecken. Begründen Sie Laufzeit und Korrektheit ihres Algorithmus.



Aufgabe 5 (6 PUNKTE)

Sei P die Menge der Eckpunkte eines konvexen Polygons in der Ebene. Die Delaunay-Triangulation von P besteht aus $n-2$ Dreiecken und $2n-3$ Kanten. Was ist die erwartete Anzahl der Kanten, die bei randomisiert inkrementeller Konstruktion der Delaunay-Triangulation zum zuletzt hinzugefügten Punkt inzident sind. Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 6 (8 PUNKTE)

In der folgenden Abbildung sind die Teile der Voronoidiagramme einer Punktmenge L und einer Punktmenge R (gestrichelt) innerhalb eines Quadrates dargestellt. Die Punkte in L liegen links der Vertikalen, die das Quadrat halbiert, die Punkte R rechts davon. Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf des Bisektors $\mathcal{B}(L, R)$!