Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

15. Juli 2011, 10:00 - 12:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	7
Gesamtpunktzahl:	50

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

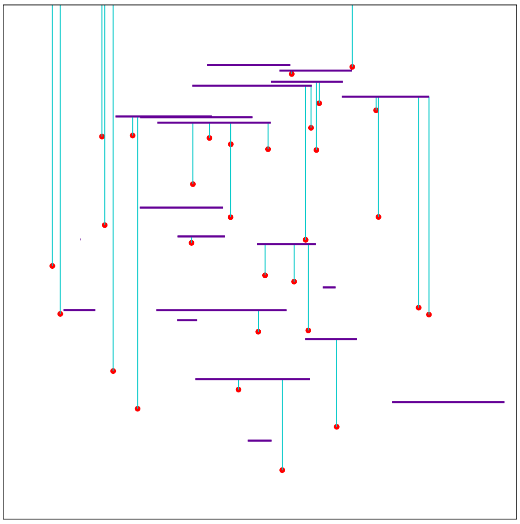
1	2	3	4	5	6	7

Aufgabe 1 (11 PUNKTE)

Sei $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m\}$ eine Menge von m horizontalen Strecken und sei $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ eine Menge von k Punkten in der Ebene. Jede Strecke ℓ_i, $1 \leq i \leq m$, sei durch ihre zwei Endpunkte (a_i, h_i) und (b_i, h_i), $a_i < b_i$, gegeben. Sie dürfen annehmen, dass die Endpunkte der Strecken paarweise verschiedene x-Koordinaten haben und dass keine zwei Strecken die gleiche Höhe haben. Es könnten aber Punktkoordinaten mit Endpunktkoordinaten zusammenfallen.

Geben Sie einen möglichst effizienten Plane-Sweep Algorithmus an, der für jeden Punkt p_i diejenige Strecke aus $\mathcal{L}$ bestimmt, die vertikal direkt oberhalb von p_i verläuft. Falls es keine solche Strecke gibt, soll ∞ ausgegeben werden.

Sei $n = k + m$. Bestimmen Sie eine möglichst gute obere Schranke für die Laufzeit des Algorithmus in Abhängigkeit von n. Begründen Sie die Korrektheit des Algorithmus.



Aufgabe 2 (6 PUNKTE)

Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

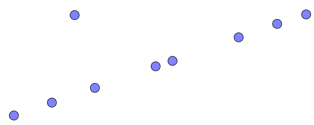
$$\begin{aligned} p = (p_x, p_y) &\mapsto \mathscr{D}(p) : Y = p_x \cdot X - p_y \\ \ell : Y = aX + b &\mapsto \mathscr{D}(\ell) = (a, -b) \end{aligned}$$

Sei P eine Menge von k Punkten, die bis auf einen alle auf einer nicht-vertikalen Geraden liegen.
Ferner sei $L = \{\mathscr{D}(p) \mid p \in P\}$ die Menge der zu den Punkten in P dualen Geraden und $\mathcal{A}(L)$ das Arrangement der Geraden in L.

(a) Aus wie vielen Knoten besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(b) Aus wie vielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(c) Aus wie vielen Zellen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)



Aufgabe 3 (8 PUNKTE)

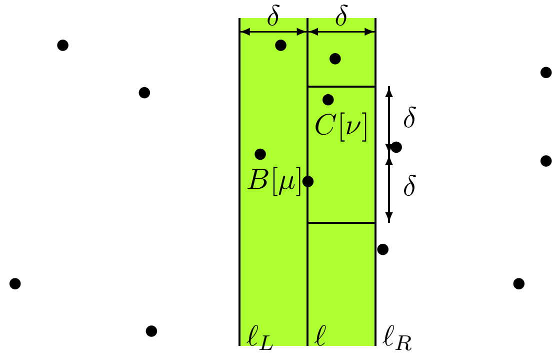
Sei S eine Menge von $n \geq 3$ Punkten in der Ebene, von denen k Punkte Extrempunkte sind.

(a) Aus wie vielen Kanten besteht jede Triangulation von S? (ohne Beweis)

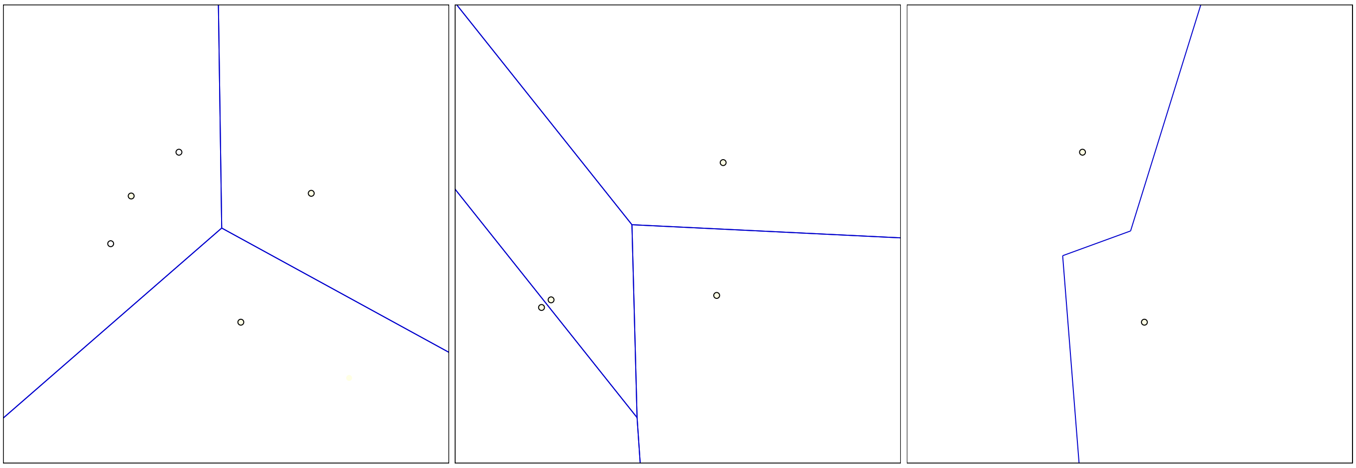
(b) Zeigen Sie, dass es in jeder Triangulation von S einen Punkt vom Grad höchstens 5 gibt.

(c) Beschreiben Sie die generische Konstruktion einer Punktmenge von $n \geq 3$ Punkten, in deren Delaunay-Triangulation es einen Punkt vom Grad $n - 1$ gibt.

Aufgabe 4 (10 PUNKTE)
In der Vorlesung haben wir einen Teile-und-Herrsche Algorithmus kennengelernt, der das Closest Pair einer Menge von Punkten in der Ebene, also das Punktepaar mit minimalem Abstand, in Zeit $O(n(\log n)^2)$ berechnet. Geben Sie den Mischschritt dieses Algorithmus an. Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke für die Laufzeit des Mischschritts an und begründen Sie diese.



Aufgabe 5 (5 PUNKTE)
Bei welcher der folgenden Abbildungen handelt es sich um einen Ausschnitt aus dem Euklidschen Voronoi-Diagramm der abgebildeten Punktmenge? Begründen Sie ihre Antwort.



Aufgabe 6 (6 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr	falsch	
◯	◯	Sind die Elemente einer Menge von n Punkten in der Ebene bereits nach y-Koordinaten sortiert gegeben, so kann man die konvexe Hülle der Punktmenge in Zeit $O(n)$ berechnen.
◯	◯	Gegeben sei eine Menge S von n Strecken. Man kann in Zeit $O(n \log n)$ testen, ob die Strecken in S paarweise disjunkt sind.
◯	◯	Für jedes $n \geq 7$ gibt es eine Menge K von n Kreisscheiben, so dass mindestens $\frac{12}{37}n^2$ Schnittpunkte der begrenzenden Kreise auf dem Rand der Vereinigung der Kreisscheiben $\mathrm{bd}(\bigcup_{k \in K} k)$ liegen.

Aufgabe 7 (4 PUNKTE)
Sei S eine Menge von n Strecken in der Ebene in allgemeiner Lage, d.h., es gibt keine 3 Strecken in S, die sich in einem Punkt schneiden. Wir betrachten die Strecken in zufälliger Reihenfolge (jede Reihenfolge ist gleichwahrscheinlich) und fügen sie eine nach der anderen hinzu und berechnen alle Schnittpunkte zwischen den bereits betrachteten Strecken. Sei p ein beliebiger, aber fester Schnittpunkt zwischen den Strecken in S. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass p erst beim Hinzufügen der letzten Strecke zum ersten Mal berechnet wird? Begründen Sie ihre Antwort.