Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

20. Juli 2012, 9:45 - 11:45 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

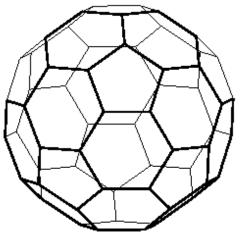
Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	7
Gesamtpunktzahl:	49

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7

Aufgabe 1 (6 PUNKTE)



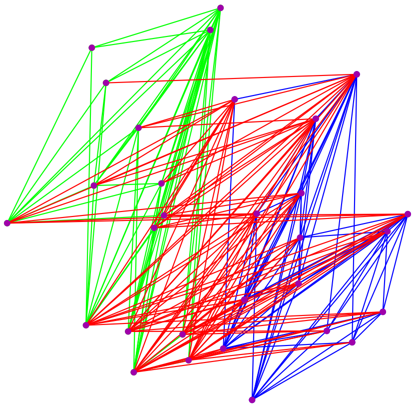
Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ eine Menge von $n \geq 4$ Punkten im dreidimensionalen Raum. Sei $CH(P)$ die konvexe Hülle von P, also das kleinste konvexe Polytop, das alle Punkte in P enthält. Alle Punkte in P seien Extrempunkte.

(a) Aus wie vielen Kanten besteht die konvexe Hülle $CH(P)$ maximal? (ohne Beweis)

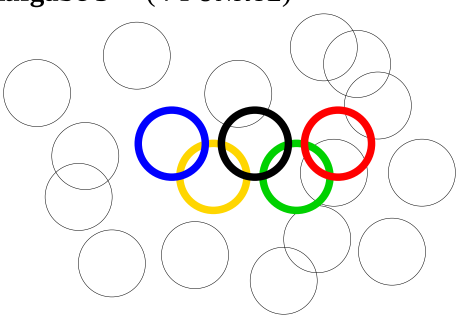
(b) Zeigen Sie, dass die konvexe Hülle $CH(P)$ eine Seitenfläche enthalten muss, die von höchstens 5 Kanten begrenzt wird.

Aufgabe 2 (8 PUNKTE)

Sei P eine Menge von Punkten in der Ebene und sei $n = |P|$. Ein Punktepaar $(p, q) \in P \times P$ heißt *SW-Paar*, falls p *südwestlich* von q liegt, d.h. falls $p_x \leq q_x$ und $p_y \leq q_y$ gilt.
Geben Sie einen Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der die Anzahl der SW-Paare in P berechnet. Ihr Algorithmus sollte, unabhängig von der Anzahl der SW-Paare, Laufzeit in $O(n(\log n)^2)$ erreichen. Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte asymptotische Laufzeit erreicht. Zur Korrektheit brauchen Sie ausnahmsweise nichts zu sagen.



Aufgabe 3 (4 PUNKTE)



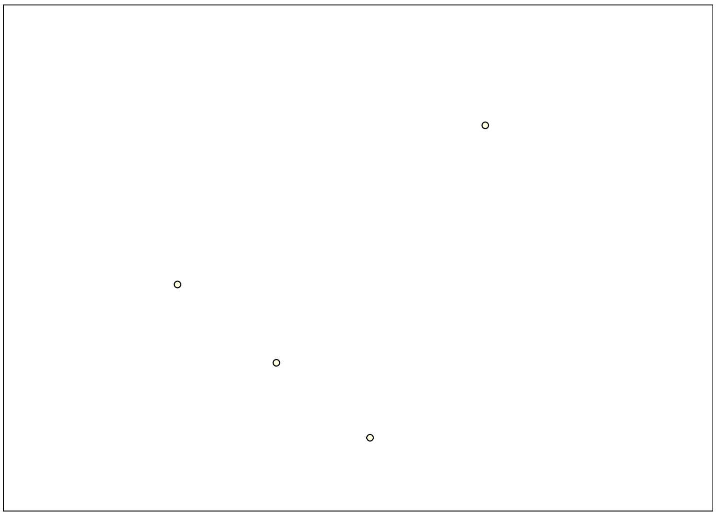
Sei S eine Menge von n Kreisen in der Ebene. Genau fünf davon bilden die olympischen Ringe. Die Kreise werden in zufälliger Reihenfolge gezeichnet, wobei jede Reihenfolge gleichwahrscheinlich ist.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die olympischen Ringe erst nach Zeichnen des letzten Kreises zum ersten Mal zu sehen sind? Begründen Sie ihre Antwort.

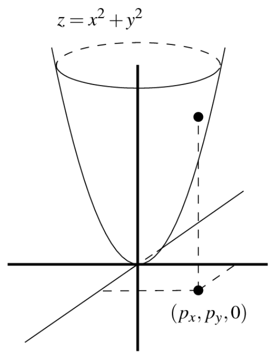
Aufgabe 4 (9 PUNKTE)

(a) Skizzieren Sie das Furthest-Point-Voronoidiagramm der vier Punkte im linken Teil der unteren Abbildung innerhalb des umschließenden Rechtecks. Die drei unteren Punkte liegen auf einer Geraden. Zur Erinnerung: Für einen Ort s in einer Menge von Orten S ist die Menge

$$FPVR_S(s) := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{dist}(p,s) \geq \mathrm{dist}(p,t) \text{ für alle } t \in S\}$$

die Furthest-Point-Voronoiregion von s. Die durch die Furthest-Point-Voronoiregionen der Punkte in S gegebene Unterteilung der Ebene ist das Furthest-Point-Voronoidiagramm von S.



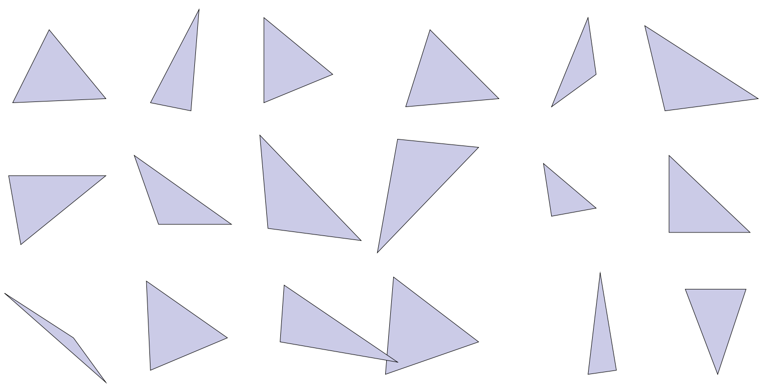


[Quelle: de Berg et al.]

(b) Wir betrachten die aus der Vorlesung bekannte Lifting Map $\mathscr{L}$, die Punkte aus der $z = 0$ Ebene auf das Paraboloid abbildet. Sei P die Menge der vier Punkte aus der Abbildung eingebettet in die $z = 0$ Ebene und sei $\mathscr{L}(P)$ die Menge der Punkte, die aus den Punkten in P durch Anwendung der Lifting Map entstehen. Aus wie vielen Kanten besteht die konvexe Hülle $CH(\mathscr{L}(P))$ der Punkte in $\mathscr{L}(P)$? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 5 (9 PUNKTE)

Sei D eine Menge von n Dreiecken in der Ebene. Sie dürfen annehmen, dass die Eckpunkte der Dreiecke paarweise verschiedene x-Koordinaten haben.



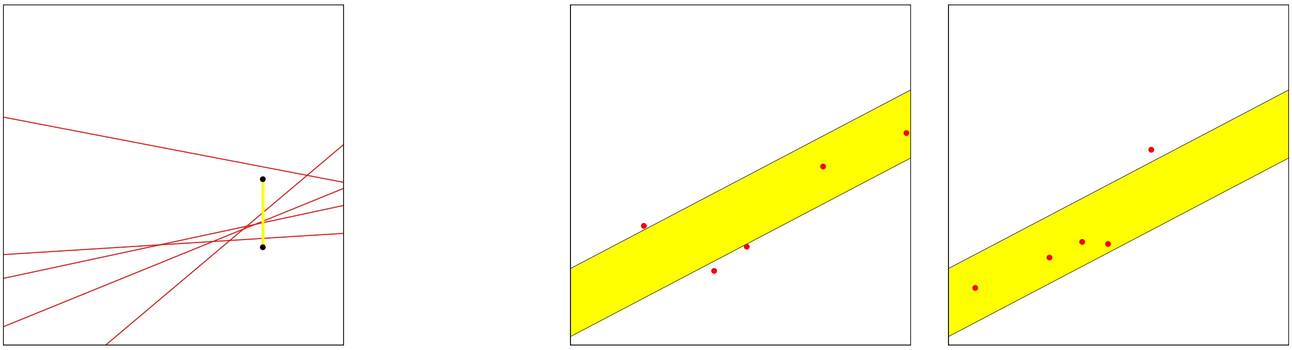
Geben Sie einen Plane-Sweep Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ testet, ob die Dreiecke in D nicht paarweise disjunkt sind, d.h., ob es zwei Dreiecke in D gibt, die einen Punkt, sei es auf dem Rand oder ihrem Inneren, gemeinsam haben. Begründen Sie kurz die Korrektheit ihres Algorithmus. Sie brauchen die Laufzeit ihres Algorithmus nicht nachzuweisen.

Aufgabe 6 (5 PUNKTE)

Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

$$\begin{aligned} p = (p_x, p_y) \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(p) : Y = -p_x \cdot X + p_y \\ \ell : Y = aX + b \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(\ell) = (a, b) \end{aligned}$$

Welche der beiden rechts abgebildeten Konfigurationen von fünf Punkten ist unter dieser Dualität dual zu der links abgebildeten Konfiguration von fünf Geraden. Die beiden links abgebildeten Punkte mit gleicher x-Koordinate (und die dazu dualen Geraden rechts) dienen der Orientierung. Begründen Sie ihre Antwort.



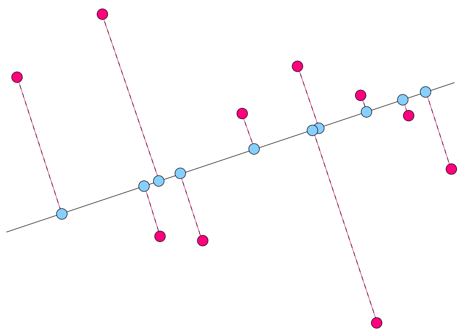
Aufgabe 7 (8 PUNKTE)

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?

2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr falsch

○ ○ Sind die Elemente einer Menge von n Punkten in der Ebene sortiert nach den x-Koordinaten ihrer Projektionspunkte auf eine nicht-vertikale Gerade ℓ gegeben, so kann man die konvexe Hülle der Punktmenge in Zeit $O(n)$ berechnen.



○ ○ Es gibt einen CREW PRAM-Algorithmus, der die konvexe Hülle jeder beliebigen Menge von n Punkten in der Ebene mit $\sqrt[3]{n^2}$ Prozessoren in Zeit $O(\log\log n)$ berechnet.

○ ○ Für jedes $n \geq 8$ gibt es eine Menge K von n Kreisscheiben, so dass mindestens $\frac{37}{42}n\sqrt{n}$ Schnittpunkte der begrenzenden Kreise auf dem Rand $\mathrm{bd}(\bigcup_{k\in K} k)$ der Vereinigung der Kreisscheiben liegen.

○ ○ Man kann in Zeit $O(n^3)$ testen, ob eine Menge von n Punkten in der Ebene 4 Punkte enthält, die auf einer Geraden liegen.