Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

31. Januar 2013, 9:15 - 11:15 Uhr

Name, Vorname: ____________________________

Matrikelnummer: ____________________________

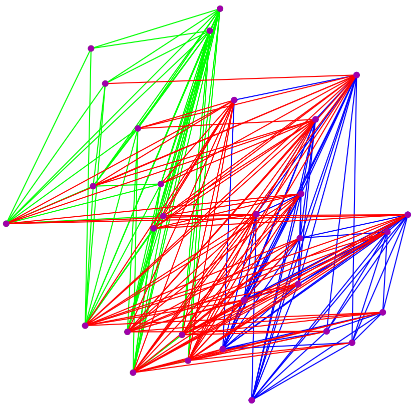
Anzahl Doppelbögen: ____________________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	7
Gesamtpunktzahl:	49

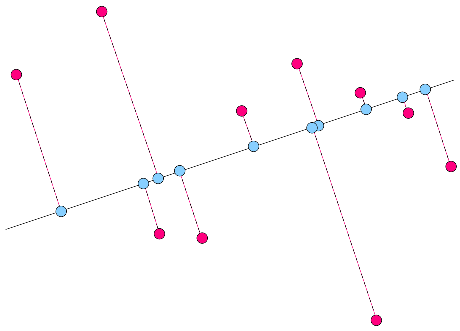
Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7

Aufgabe 1 (8 PUNKTE)
Sei P eine Menge von Punkten in der Ebene und sei $n = |P|$. Ein Punktepaar $(p, q) \in P \times P$ heißt *SW-Paar*, falls p *südwestlich* von q liegt, d.h. falls $p_x \leq q_x$ und $p_y \leq q_y$ gilt.
Geben Sie einen Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der die Anzahl der SW-Paare in P berechnet. Ihr Algorithmus sollte, unabhängig von der Anzahl der SW-Paare, Laufzeit in $O(n(\log n)^2)$ erreichen. Sie brauchen nicht nachzuweisen, dass ihr Algorithmus die geforderte asymptotische Laufzeit erreicht. Begründen Sie, wieso ihr Algorithmus korrekt ist.



Aufgabe 2 (9 PUNKTE)
Sei $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ eine Folge von n Punkten in der Ebene sortiert nach den x-Koordinaten ihrer Projektionspunkte auf eine nicht-vertikale Gerade ℓ. Die Projektionspunkte seien paarweise verschieden. Geben Sie einen Algorithmus an, der unter diesen Voraussetzungen die konvexe Hülle der Punkte in Zeit $O(n)$ berechnet und begründen Sie, warum der Algorithmus diese Laufzeit erreicht. Zur Korrektheit brauchen Sie ausnahmsweise nichts zu sagen.



Aufgabe 3 (5 PUNKTE)

(a) Sei S eine Menge von $n \geq 3$ Punkten in der Ebene, von denen k Punkte Extrempunkte sind. Aus wie vielen Kanten besteht jede Triangulation von S? (ohne Beweis)

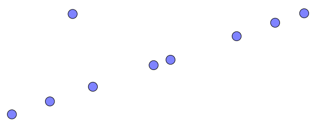
(b) Beschreiben Sie die generische Konstruktion einer Punktmenge von $n \geq 3$ Punkten, in deren Delaunay-Triangulation es einen Punkt vom Grad $n - 1$ gibt.

Aufgabe 4 (5 PUNKTE)
Sei P die Menge der Eckpunkte eines konvexen Polygons in der Ebene. Die Delaunay-Triangulation von P besteht aus $n - 2$ Dreiecken und $2n - 3$ Kanten. Was ist die erwartete Anzahl der Kanten, die bei randomisiert inkrementeller Konstruktion der Delaunay-Triangulation zum zuletzt hinzugefügten Punkt inzident sind. Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 5 (4 PUNKTE)
Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

$$\begin{aligned} p = (p_x, p_y) &\mapsto \mathscr{D}(p) : Y = p_x \cdot X - p_y \\ \ell : Y = aX + b &\mapsto \mathscr{D}(\ell) = (a, -b) \end{aligned}$$

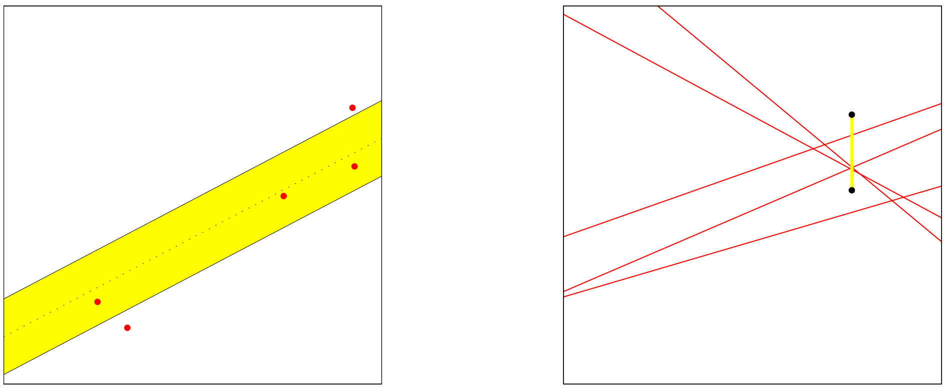
Sei P eine Menge von k Punkten, die bis auf einen alle auf einer nicht-vertikalen Geraden liegen.
Ferner sei $L = \{\mathscr{D}(p) \mid p \in P\}$ die Menge der zu den Punkten in P dualen Geraden und $\mathcal{A}(L)$ das Arrangement der Geraden in L.



(a) Aus wie vielen Knoten besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)
(b) Aus wie vielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

Aufgabe 6 (12 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr	falsch	
◯	◯	Man kann in Zeit $O(n^2)$ testen, ob eine Menge von n Punkten in der Ebene 3 Punkte enthält, die auf einer Geraden liegen.
◯	◯	Sei S eine Menge von n Strecken in der Ebene. Es gibt einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ testet, ob die Strecken in S paarweise disjunkt sind.
◯	◯	Es gibt einen EREW PRAM-Algorithmus, der die konvexe Hülle jeder beliebigen Menge von n Punkten in der Ebene mit $\sqrt{n}$ Prozessoren in Zeit $O(1)$ berechnet.
◯	◯	Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung aus Aufgabe 5. Unter $\mathscr{D}$ sind die links abgebildeten Punkte dual zu den rechts abgebildeten Geraden.



wahr	falsch	
◯	◯	Jede Delaunay-Triangulation einer Punktmenge enthält einen Knoten vom Grad höchstens 7.
◯	◯	Jede Triangulation einer Punktmenge enthält einen Knoten vom Grad mindestens 5.

Aufgabe 7 (6 PUNKTE)
In der Abbildung rechts ist das Voronoi-Diagramm (genau genommen, ein Ausschnitt aus dem Voronoi-Diagramm) einer Menge $\{p_0, \ldots, p_7\}$ von 8 Punkten zu sehen sowie ein Punkt p_8. Skizzieren Sie (in diese Abbildung) das Voronoi-Diagramm der Punktmenge $\{p_0, \ldots, p_8\}$, also das Voronoi-Diagramm, das nach Hinzufügen von p_8 entsteht.