Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

19. Juli 2013, 9:45 - 11:45 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit: 120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel: Keine!
Gesamtzahl Aufgaben: 5
Gesamtpunktzahl: 54

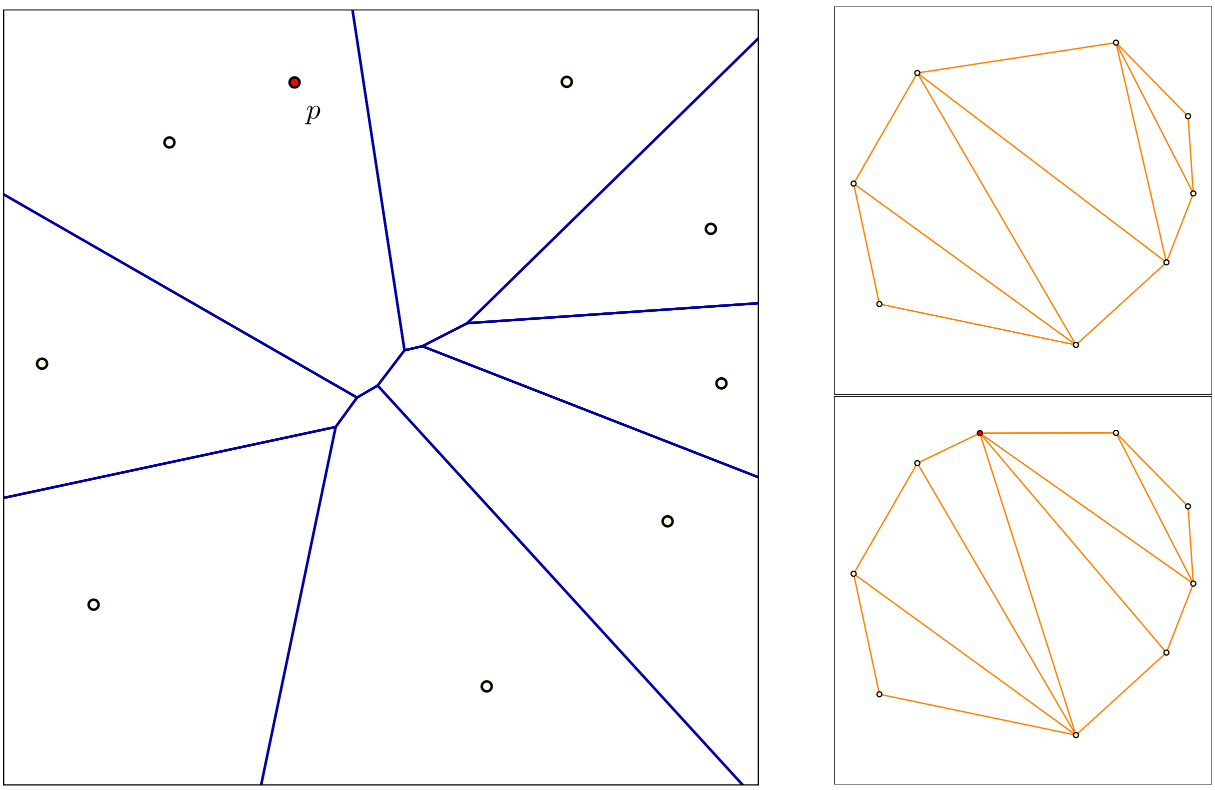
Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5

Aufgabe 1 (26 PUNKTE (8 + 7 + 2 + 4 + 5))

Eine endliche Menge von Punkten ist in *konvexer Lage*, falls alle Punkte Extrempunkte der Menge sind. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn die Punkte als Menge der Eckpunkte eines konvexen Polygons gegeben sind.

(a) In der Abbildung unten links ist das Voronoidiagramm einer Menge S von Punkten in konvexer Lage ausschnittsweise zu sehen. Ferner ist ein dunkler (roter) Punkt zu sehen, nennen wir ihn p, der nicht zu S gehört. Skizzieren Sie die Voronoiregion von p bezüglich $S \cup \{p\}$, genauer gesagt, deren Rand im angegeben Rechteck. Als Hilfestellung sind rechts die Delaunaytriangulierungen von S und $S \cup \{p\}$ jeweils skaliert zu sehen.



(b) Geben Sie nun einen Algorithmus an, der das Voronoidiagramm der Menge S der Eckpunkte eines konvexen Polygons P randomisiert inkrementell möglichst effizient berechnet. Als Eckpunktmenge enthält S keine drei kollinearen Punkte. Ihr Algorithmus sollte analog zu dem Algorithmus aus der Vorlesung, der die Delaunaytriangulierung der Menge der Eckpunkten eines konvexen Polygons berechnet, rekursiv arbeiten und das Voronoidiagramm von S nach der rekursiven Berechnung des Voronoidiagramms von $S - \{q\}$ für einen zufälligen Punkt $q \in S$ ausgehend von diesem Diagramm bestimmen.

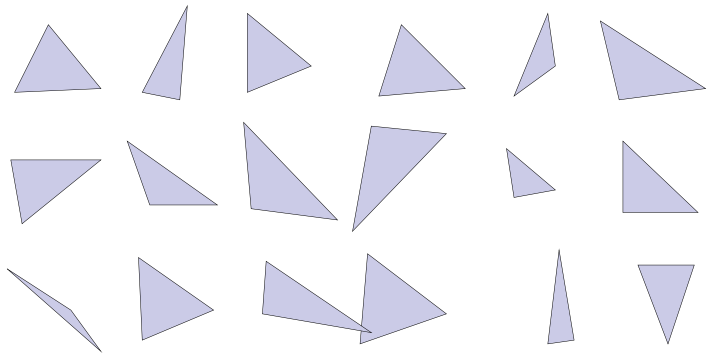
(c) Sei S eine Menge von $n \geq 3$ Punkten in konvexer Lage. Aus wie vielen Kanten besteht das Voronoidiagramm von S? (ohne Beweis)

(d) Sei S wiederum eine Menge von $n \geq 3$ Punkten in konvexer Lage. Wie viele Kanten begrenzen die Voronoiregion eines Punktes in S durchschnittlich? Begründen Sie ihre Antwort.

(e) Welche erwartete Laufzeit im schlechtesten Fall erreicht ihr Algorithmus aus Teil (b)? Begründen Sie ihre Antwort ausführlich.

Aufgabe 2 (6 PUNKTE)
Sei P eine Menge von $n \geq 4$ Punkten in der Ebene. Eine Vierteilung von P ist ein Paar von Geraden (ℓ_1, ℓ_2), so dass in jedem abgeschlossenen „Quadranten" mindestens ein Viertel der Punkte liegt, genauer gesagt, mindestens $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ Punkte aus P. Zeigen Sie, dass eine Vierteilung existiert. Sie dürfen dazu alle Resultate aus der Vorlesung benutzen. (Abgeschlossen heißt, der Rand zählt mit!)

Aufgabe 3 (9 PUNKTE)

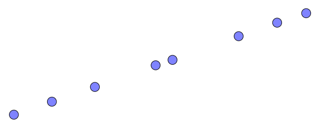


Sei D eine Menge von n Dreiecken in der Ebene. Sie dürfen annehmen, dass die Eckpunkte der Dreiecke paarweise verschiedene x-Koordinaten haben.
Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ testet, ob es in D ein Paar verschiedener Dreiecke gibt, die nicht disjunkt sind, d.h., die einen Punkt, sei es auf dem Rand oder im Inneren, gemeinsam haben. Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit im schlechtesten Fall erreicht. Sie dürfen dabei annehmen, dass eine Funktion existiert, die in konstanter Zeit testet, ob zwei gegebene Dreiecke disjunkt sind. Die Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie nicht nachzuweisen.

Aufgabe 4 (8 PUNKTE)
Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

$$p = (p_x, p_y) \quad \mapsto \quad \mathscr{D}(p) : Y = p_x \cdot X - p_y$$
$$\ell : Y = aX + b \quad \mapsto \quad \mathscr{D}(\ell) = (a, -b)$$

Sei P eine Menge von k Punkten, die alle auf einer nicht-vertikalen Geraden liegen.
Ferner sei $L = \{\mathscr{D}(p) \mid p \in P\}$ die Menge der zu den Punkten in P dualen Geraden und $\mathcal{A}(L)$ das Arrangement der Geraden in L.



(a) Aus wie vielen Knoten besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(b) Aus wie vielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(c) Aus wie vielen Zellen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(d) Aus wie vielen Kanten besteht das Delaunaydiagramm von P? (ohne Beweis)

Aufgabe 5 (5 PUNKTE)
Sei G ein zusammenhängender einfacher dreiecksfreier kreuzungsfrei eingebetteter planarer Graph mit $n \geq 4$ Knoten. Dreiecksfrei bedeutet, dass es in der Einbettung von G kein Gebiet gibt, das von höchstens 3 Kanten begrenzt wird. Beweisen Sie, dass G höchstens $2n - 4$ Kanten hat.