Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

6. Februar 2014, 9:15 - 11:15 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

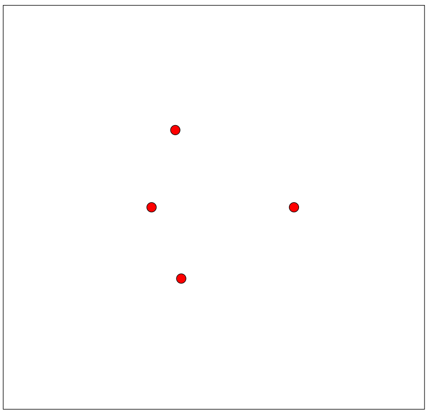
Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	6
Gesamtpunktzahl:	54

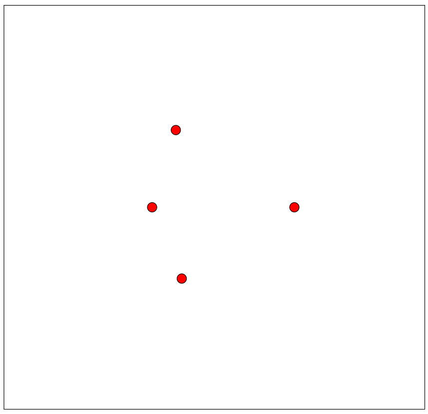
Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6

Aufgabe 1 (12 PUNKTE (5 + 5 + 2))

(a) Skizzieren Sie in der Abbildung unten links das Voronoidiagramm der gegebenen vier Punkte innerhalb des umschließenden Rechtecks.



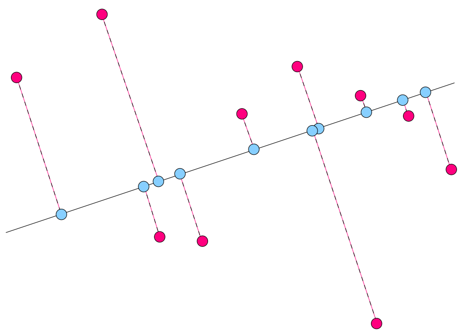


(b) Zeichnen Sie in die Abbildung oben rechts die Delaunaytriangulierung der vier Punkte ein.

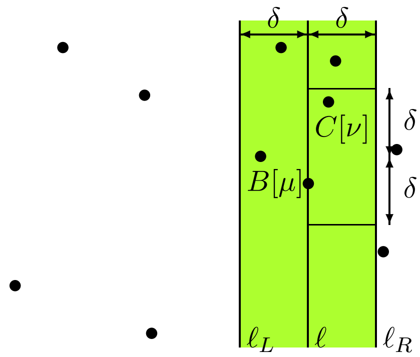
(c) Sei S eine Menge von $n \geq 3$ Punkten in der Ebene. Aus wie vielen Kanten besteht das Voronoidiagramm von S maximal? (ohne Beweis)

Aufgabe 2 (9 PUNKTE)

Sei $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ eine Folge von n Punkten in der Ebene sortiert nach den x-Koordinaten ihrer Projektionspunkte auf eine nicht-vertikale Gerade ℓ. Die Projektionspunkte seien paarweise verschieden. Geben Sie einen Algorithmus an, der unter diesen Voraussetzungen die konvexe Hülle der Punkte in Zeit $O(n)$ berechnet und begründen Sie, warum der Algorithmus diese Laufzeit erreicht. Zur Korrektheit brauchen Sie ausnahmsweise nichts zu sagen.



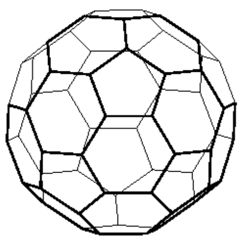
Aufgabe 3 (11 PUNKTE)
Sei P eine Menge von Punkten in der Ebene und sei $n = |P|$. Geben Sie einen Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der den kleinsten Euklidschen Abstand zweier verschiedener Punkte in P in Zeit $O(n(\log n)^2)$ berechnet, also den Abstand eines Closest-Pairs in P. Begründen Sie, warum ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Zur Korrektheit brauchen Sie ausnahmsweise nichts zu sagen.



Aufgabe 4 (12 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr	falsch	
◯	◯	Man kann in Zeit $O(\sqrt{n})$ testen, ob eine Menge von n Punkten in der Ebene, die in einer Liste gegeben sind, drei Punkte enthält, die auf einer Geraden liegen.
◯	◯	Gegeben sei eine Menge S von n Strecken. Man kann in Zeit $O(n \log n)$ testen, ob die Strecken in S paarweise disjunkt sind.
◯	◯	Wenn n Punkte wie in Aufgabe 2 beschrieben vorliegen, so kann man mit einem auf Plane-Sweep und Rotating-Calipers basierenden Algorithmus ein Punktepaar mit maximalem Abstand in Zeit $O(n)$ finden.
◯	◯	Es gibt Arrangements von n Geraden in der Ebene, die $\Omega(n^3)$ Zellen enthalten.
◯	◯	Für jedes $n \geq 8$ gibt es eine Menge von n Kreisscheiben in allgemeiner Lage, so dass mindestens $\frac{1}{8}n^2$ Schnittpunkte der Kreise auf dem Rand der Vereinigung der Kreisscheiben liegen.
◯	◯	Für jedes $n \geq 43$ gibt es eine Menge von n Punkten in der Ebene, deren Delaunaytriangulierung einen Punkt vom Grad 42 enthält.

Aufgabe 5 (6 PUNKTE (2 + 4))



Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ eine Menge von $n \geq 4$ Punkten im dreidimensionalen Raum. Sei $CH(P)$ die konvexe Hülle von P, also das kleinste konvexe Polytop, das alle Punkte in P enthält. Alle Punkte in P seien Extrempunkte.

(a) Aus wie vielen Kanten besteht die konvexe Hülle $CH(P)$ maximal? (ohne Beweis)

(b) Zeigen Sie dann, dass die konvexe Hülle $CH(P)$ eine Seitenfläche enthalten muss, die von höchstens 5 Kanten begrenzt wird.

Aufgabe 6 (4 PUNKTE)
Sei P eine Menge von Punkten, die alle auf einer Geraden ℓ liegen, die den Ursprung o nicht enthält. Ferner sei $\mathscr{D}$ die aus der Vorlesung bekannte polare Dualitätsabbildung. Wie viele Schnittpunkte gibt es im Arrangement $\mathcal{A}(\mathscr{D}(P))$ der zu den Punkten in P dualen Geraden. Begründen Sie ihre Antwort.