Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

17. Juli 2014, 11:00 - 13:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

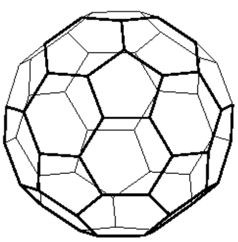
Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit: 120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel: Keine!
Gesamtzahl Aufgaben: 6
Gesamtpunktzahl: 47

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6

Aufgabe 1 (8 Punkte)



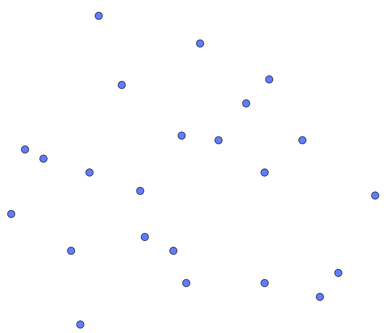
(a) Ein zusammenhängender eingebetteter planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten, e Kanten und f Flächen erfüllt die Euler-Formel $n - e + f = 2$. Beweisen Sie, dass ein (zusammenhängender) einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten maximal $3n - 6$ Kanten besitzt.

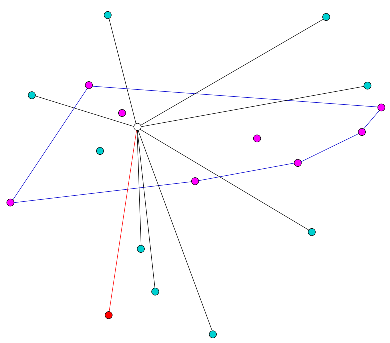
(b) Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ eine Menge von $n \geq 4$ Punkten im dreidimensionalen Raum. Sei $CH(P)$ die konvexe Hülle von P. Alle Punkte in P seien Extrempunkte. Zeigen Sie, dass $CH(P)$ einen Eckpunkt besitzt, an dem sich höchstens 5 Kanten von $CH(P)$ treffen.

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Gegeben sei eine Menge P von n Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage. Ein Punkt p liegt *südwestlich* von einem Punkt q, falls $p_x \leq q_x$ und $p_y \leq q_y$ gilt. Die Punkte in P seien bereits xy-lexikographisch aufsteigend sortiert in einem Array $A[1 \ldots n]$ gegeben.

Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n)$ alle Punkte in P bestimmt, für die es genau einen anderen Punkt in P gibt, der südwestlich des Punktes liegt. Zeigen Sie, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Falls es ihnen nicht gelingen sollte, einen $O(n)$ Algorithmus für vorsortierte Punktmengen zu finden, so geben Sie einen $O(n \log n)$ Algorithmus an und weisen die geforderte Laufzeit nach. Begründen Sie die Korrektheit ihres Algorithmus.





Aufgabe 3 (9 Punkte)

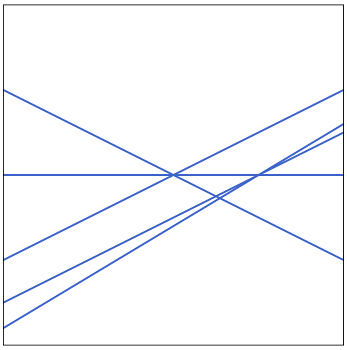
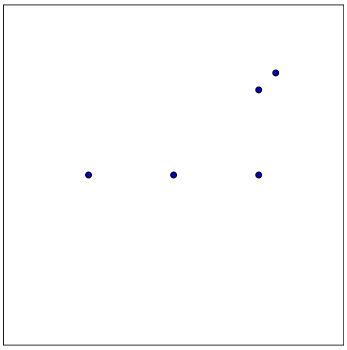
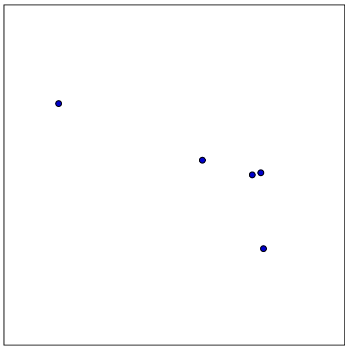
Geben Sie einen Algorithmus an, der die konvexe Hülle einer Menge S von n Punkten in der Ebene mit Hilfe randomisierter inkrementeller Konstruktion in erwarteter Zeit $O(n \log n)$ berechnet. Zeigen Sie, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Die Korrektheit ihres Algorithmus müssen Sie nicht nachweisen.

Aufgabe 4 (5 PUNKTE)

Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

$$\begin{aligned} p = (p_x, p_y) \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(p) : Y = p_x \cdot X - p_y \\ \ell : Y = aX + b \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(\ell) = (a, -b) \end{aligned}$$

Welche der beiden rechts abgebildeten Konfigurationen von fünf Punkten ist unter $\mathscr{D}$ dual zu der links abgebildeten Konfiguration von fünf Geraden. Begründen Sie ihre Antwort.

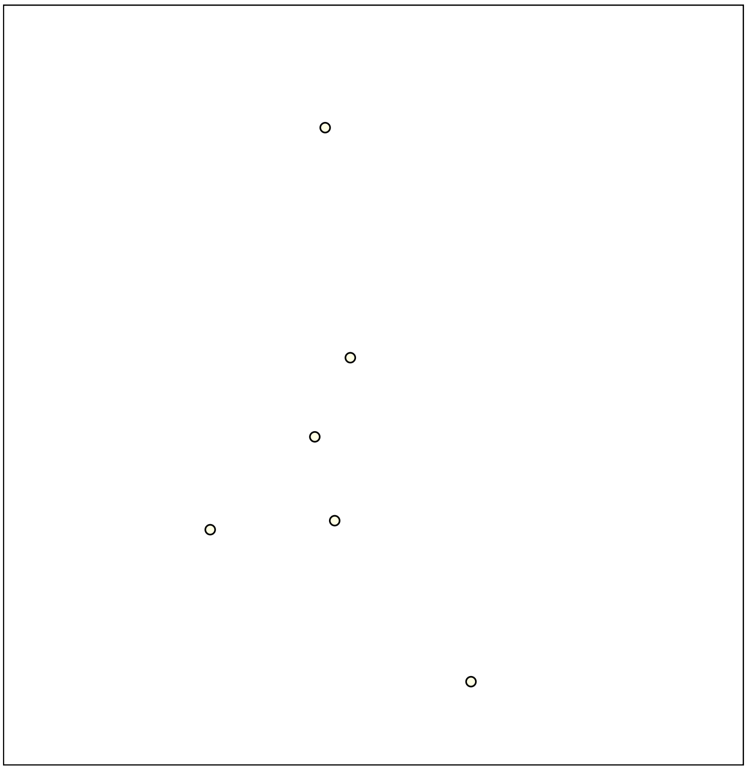




Aufgabe 5 (8 PUNKTE)

Sei S eine Punktmenge in der Ebene. $FPVR_S(s) := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{dist}(p, s) \geq \operatorname{dist}(p, t)$ für alle $t \in S\}$ ist die Furthest-Point-Voronoiregion von $s \in S$.

(a) Skizzieren Sie die konvexe Hülle der Punkte in der folgenden Abbildung.

(b) Skizzieren Sie das Furthest-Point-Voronoidiagramm, also die Ränder der Furthest-Point-Voronoiregionen, der Punkte innerhalb des umschließenden Rechtecks.



Aufgabe 6 (6 PUNKTE)

Sei L eine Menge von n Geraden in allgemeiner Lage in der Ebene. $\mathcal{A}(L)$ bezeichne das Arrangement der Geraden in L.

(a) Aus wie vielen Knoten besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(b) Aus wie vielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(c) Aus wie vielen Zellen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)