Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

18. Februar 2015, 9:15 - 11:15 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

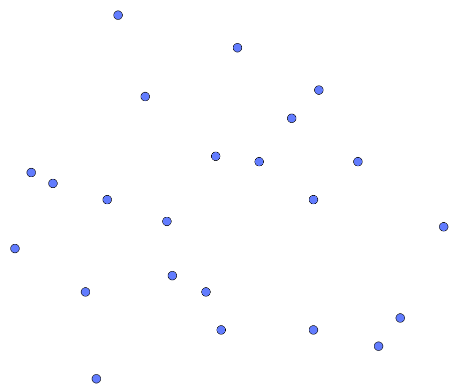
Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit: 120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel: Keine!
Gesamtzahl Aufgaben: 6
Gesamtpunktzahl: 47

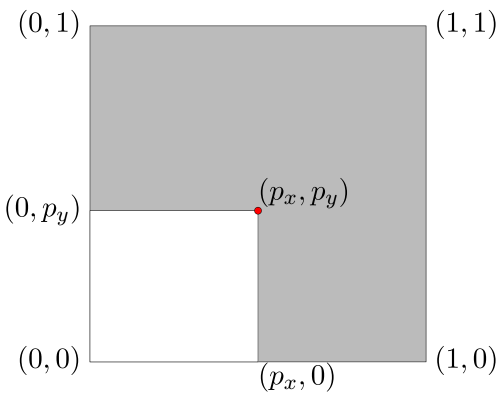
Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6

Aufgabe 1 (9 PUNKTE)
Sei P eine Menge von n Punkten in der Ebene. Geben Sie einen Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der die maximalen Punkte in P aufsteigend nach x-Koordinate sortiert in Zeit $O(n \log n)$ berechnet. Zur Erinnerung: Ein Punkt $p \in P$ heißt maximal, falls $\{q \in P - \{p\} \mid q_x \geq p_x \text{ und } q_y \geq p_y\} = \emptyset$.
Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus. Ihr Algorithmus muss die geforderte Laufzeit erzielen, Sie müssen dies aber nicht nachweisen!



Aufgabe 2 (8 PUNKTE)
Sei S eine Menge von n Punkten in der Ebene. Ein jeder Punkt $p = (p_x, p_y)$ aus S habe Koordinaten zwischen Null und Eins, d. h. $0 < p_x < 1$ und $0 < p_y < 1$. Für jeden Punkt $p \in S$ sei $L(p)$ das Polygon mit Ecken $(0, p_y), (p_x, p_y), (p_x, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$. Sei $S' \subseteq S$ die Menge aller Punkte in S, für die jeder Punkt aus S in dem Polygon $L(p)$ oder auf dem Rand von $L(p)$ liegt. Geben Sie einen Plane-Sweep Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ den (bzw. einen) Punkt aus S' berechnet, für den die Fläche des Polygons $L(p)$ minimal ist. Die Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie nicht nachzuweisen, ebenso wenig die Laufzeitschranke, aber beides sollte erfüllt sein.



Aufgabe 3 (4 PUNKTE)
Das Sylvester-Gallai Theorem besagt, dass es für jede endliche Menge von $n \geq 2$ Punkten in der Ebene eine Gerade gibt, die genau zwei der Punkte enthält, aber keinen dritten, es sei denn, die Punkte liegen alle auf einer Geraden. Sei nun L eine Menge von $m \geq 3$ Geraden, die sich nicht alle in einem Punkt schneiden. Ist es möglich, dass jeder Knoten im Arrangement $\mathcal{A}(L)$ auf mindestens 3 Geraden aus L liegt? Begründen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 4 (12 PUNKTE)

(a) Ein zusammenhängender eingebetteter planarer Graph mit n Knoten, e Kanten und f Flächen erfüllt die Euler-Formel

$$n - e + f = 2$$

Beweisen Sie, dass ein (zusammenhängender) einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten maximal $3n - 6$ Kanten besitzt.

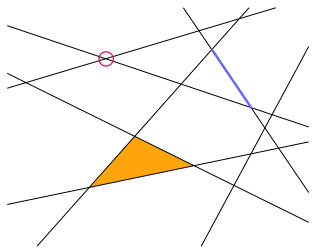
(b) Der Grad eines Punktes p in einer Triangulation einer Punktmenge ist die Anzahl der Kanten, die in p enden. Zeigen Sie, dass es in jeder Triangulation einer Punktmenge einen Knoten vom Grad höchstens 5 gibt.

(c) Geben Sie eine Konstruktionsvorschrift für eine Menge P von n Punkten an, so dass es in jeder Triangulation von P einen Punkt vom Grad $n-1$ gibt. Die Punktmenge P sollte keine drei Punkte enthalten, die auf einer Geraden liegen.

(d) Sei S eine Menge von n Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage, d.h., es gibt keine 3 Punkte aus S, die auf der gleichen Geraden liegen. Sei k die Anzahl der Extrempunkte in S, also die Anzahl der Eckpunkte von $CH(S)$. Aus wie vielen Kanten besteht eine Triangulation $T(S)$? (ohne Beweis).

Aufgabe 5 (9 PUNKTE)

Sei L eine Menge von n Geraden in allgemeiner Lage in der Ebene. Ferner bezeichne $\mathcal{A}(L)$ das Arrangement der Geraden in L.



(a) Aus wie vielen Knoten besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(b) Aus wie vielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(c) Aus wie vielen Zellen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(d) Wir konstruieren $\mathcal{A}(L)$ randomisiert inkrementell: Zunächst permutieren wir die Eingabefolge der Geraden zufällig und konstruieren $\mathcal{A}(L)$, in dem wir die Geraden in der durch die Permutation bestimmten Reihenfolge eine nach der anderen zum bisher konstruierten Arrangement hinzufügen. Alle Permutationen seien gleichwahrscheinlich. Wir betrachten einen beliebigen, aber festen Knoten v des Arrangements $\mathcal{A}(L)$. Wie wahrscheinlich ist es, dass v erst beim Hinzufügen der letzten Geraden entsteht? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 6 (5 PUNKTE)

Skizzieren Sie das Voronoidiagramm der vier Punkte in der folgenden Abbildung innerhalb des umschließenden Rechtecks.