Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

23. Juli 2015, 11:00 - 13:00 Uhr

Name, Vorname: ________________

Matrikelnummer: ________________

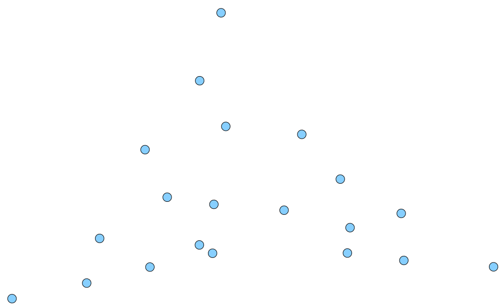
Anzahl Doppelbögen: ________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	7
Gesamtpunktzahl:	50

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7

Aufgabe 1 (8 PUNKTE)
Sei P eine Menge von n Punkten in der Ebene. Geben Sie einen Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der die maximalen Punkte in P aufsteigend nach x-Koordinate sortiert in Zeit $O(n \log n)$ berechnet. Zur Erinnerung: Ein Punkt $p \in P$ heißt maximal, falls $\{q \in P - \{p\} \mid q_x \geq p_x \text{ und } q_y \geq p_y\} = \emptyset$. Ihr Algorithmus muss die geforderte Laufzeit erzielen, Sie müssen diese aber ebenso wie die Korrektheit nicht nachweisen!



Aufgabe 2 (14 PUNKTE)
Sei P eine Menge von $n \geq 3$ Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage, d.h., es gibt keine 3 Punkte, die auf einer Geraden liegen, und keine 4 Punkte, die auf einem Kreis liegen. Ferner seien genau 3 Punkte in P Extrempunkte bzgl. P.

(a) Leiten Sie aus der Euler-Formel $n - e + f = 2$ für zusammenhängende eingebettete planare Graphen mit $n \geq 3$ Knoten, e Kanten und f Flächen ab, dass jede Triangulierung von P genau $3n - 6$ Kanten besitzt.

(b) Wir wählen einen Punkt aus P zufällig gleichverteilt. Was ist der Erwartungswert für den Grad des Punktes in der Delaunaytriangulierung von P? Begründen Sie ihre Antwort.

(c) Wir betrachten die Voronoiknoten im Voronoidiagramm von P. Wir wählen einen Voronoiknoten zufällig gleichverteilt. Was ist der Erwartungswert für den Grad des Voronoiknotens? Begründen Sie ihre Antwort.

(d) Aus wie vielen Kanten besteht die Furthest-Point-Delaunaytriangulierung von P? (o. Beweis)

Aufgabe 3 (5 PUNKTE)
Beschreiben Sie die Konstruktion einer Punktmenge P mit $n \geq 3$ Punkten in der Ebene, so dass es in jeder(!) Triangulation von P einen Punkt vom Grad $n - 1$ und insgesamt $3n - 6$ Kanten gibt.

Aufgabe 4 (6 PUNKTE)
Sei L eine Menge von n Geraden in allgemeiner Lage in der Ebene.

(a) Wie vielen Knoten besitzt das Arrangement $\mathcal{A}(L)$ der Geraden in L? (ohne Beweis)

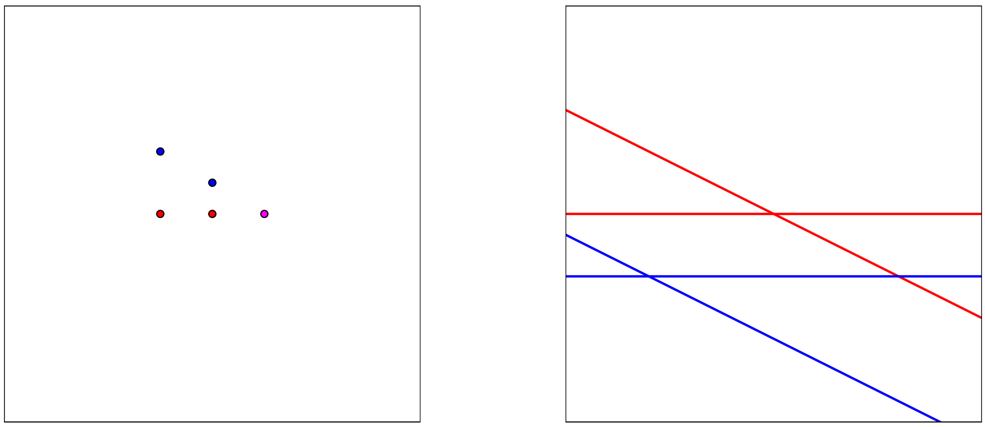
(b) Aus wie vielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(c) Aus wie vielen Flächen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

Aufgabe 5 (4 PUNKTE)
Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

$$\begin{aligned} p = (p_x, p_y) &\quad\mapsto\quad \mathscr{D}(p) : Y = p_x \cdot X - p_y \\ \ell : Y = aX + b &\quad\mapsto\quad \mathscr{D}(\ell) = (a, -b) \end{aligned}$$

Die 4 Geraden in der rechten Abbildung sind unter $\mathscr{D}$ dual zu vier der fünf Punkte in der linken Abbildung. Die zum fünften Punkt duale Gerade fehlt jedoch. Zeichnen Sie die zum fünften Punkt duale Gerade in die rechte Abbildung ein.



Aufgabe 6 (4 PUNKTE)
Gegeben seien zwei Kreise $C_1 = (p_1, r_1)$ und $C_2 = (p_2, r_2)$ mit Zentren p_i und Radien r_i, $i = 1, 2$ in der xy-Ebene des $\mathbb{R}^3$. Sei h_i die Ebene, deren Schnitt mit dem Paraboloid $Z = X^2 + Y^2$ projeziert auf die xy-Ebene den Kreis C_i ergibt. Sei $\ell = h_1 \cap h_2$. Wie liegt ℓ relativ zum Paraboloid $Z = X^2 + Y^2$, wenn sich die beiden Kreise berühren? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 7 (9 PUNKTE)
Sei $\mathscr{R}$ eine Menge von n achsenparallelen Rechtecken in der Ebene. Die Seiten der Rechteckte in $\mathscr{R}$ seien paarweise disjunkt, d.h., die Seiten schneiden sich nicht und berühren sich auch nicht. Jedes Rechteck ist durch die Koordinaten seines linken unteren und seines rechten oberen Eckpunktes gegeben. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der testet, ob es in $\mathscr{R}$ zwei verschiedene Rechtecke R und R' gibt, so dass R' in R enthalten ist. Bestimmen Sie die Laufzeit ihres Algorithmus.