Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

4. Februar 2016, 9:00 - 11:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

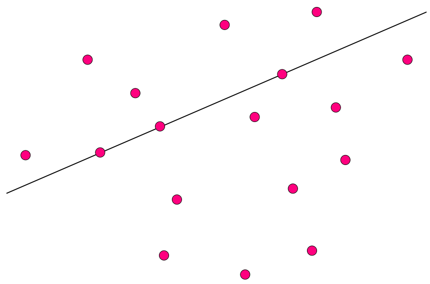
Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	6
Gesamtpunktzahl:	48

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

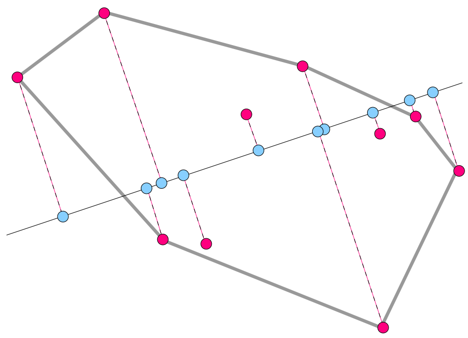
Aufgabe 1 (6 Punkte)

Geben Sie einen Algorithmus an, der für eine gegebene Menge P von n Punkten in der Ebene in Zeit $O(n^2)$ entscheidet, ob P drei kollineare Punkte enthält, also drei Punkte, die auf einer Geraden liegen. Sie dürfen hierbei auf alle Algorithmen aus der Vorlesung zurückgreifen, ohne diese nochmals im Detail beschreiben zu müssen. Sie brauchen nicht nachzuweisen, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Auch zur Korrektheit brauchen Sie ausnahmsweise nichts zu sagen.



Aufgabe 2 (9 Punkte)

Sei $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ eine Folge von n Punkten in der Ebene sortiert nach den x-Koordinaten ihrer Projektionspunkte auf eine nicht-vertikale Gerade ℓ. Die Projektionspunkte seien paarweise verschieden. Geben Sie einen Algorithmus an, der unter diesen Voraussetzungen die konvexe Hülle der Punkte in Zeit $O(n)$ berechnet und begründen Sie, warum der Algorithmus diese Laufzeit erreicht. Zur Korrektheit brauchen Sie ausnahmsweise nichts zu sagen. (Falls Sie keinen Algorithmus angeben können, der die geforderte Laufzeit erreicht, geben Sie einen Algorithmus an, der die konvexe Hülle der Punkte in Zeit $O(n \log n)$ bestimmt.)



Aufgabe 3 (10 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr falsch

◯ ◯ Es gibt eine Menge von $n \geq 22$ Punkten im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, deren konvexe Hülle $3n \log n$ Seitenflächen besitzt.

◯ ◯ Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

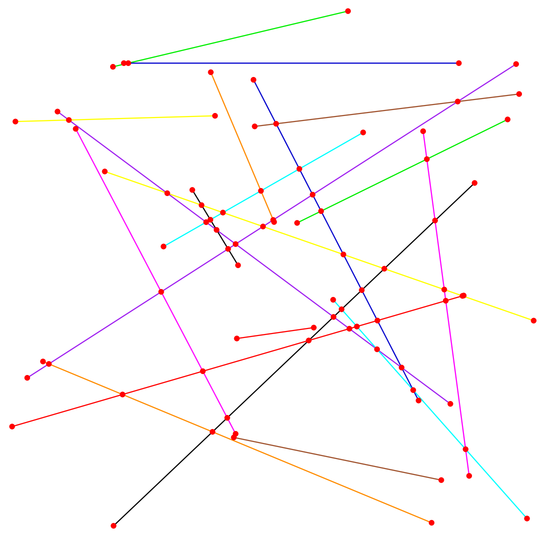
$$\begin{aligned} p = (p_x, p_y) \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(p) : Y = -p_x \cdot X + p_y \\ \ell : Y = aX + b \quad &\mapsto \quad \mathscr{D}(\ell) = (a, b) \end{aligned}$$

Sei P eine Menge von $n \geq 18$ Punkten, die alle auf einer nicht-vertikalen Geraden liegen, und sei $\mathcal{A}(L)$ für $L = \{\mathscr{D}(p) \mid p \in P\}$ das Arrangement der zu den Punkten in P dualen Geraden. Dann besteht $\mathcal{A}(L)$ aus $n(n+1)/2$ Strecken und Strahlen.

◯ ◯ Für jedes $n \geq 3$ gibt es eine Menge von n Punkten in der Ebene, deren Delaunaytriangulation einen Knoten vom Grad $n-1$ besitzt. Zur Erinnerung: Der Grad eines Punktes p in einer Triangulation einer Punktmenge ist die Anzahl der Kanten, die in p enden.

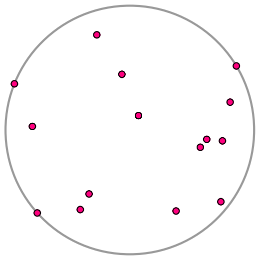
◯ ◯ Der vollständige Graph mit 7 Knoten kann kreuzungsfrei in die Ebene eingebettet werden.

◯ ◯ Sei P ein konvexes Polygon in der Ebene, gegeben durch die Folge seiner n Eckpunkte im Gegenuhrzeigersinn. Ein flächenkleinstes, P umschließendes Rechteck kann in linearer Zeit $O(n)$ berechnet werden.



Aufgabe 4 (11 PUNKTE)
Sei S eine Menge von n Strecken in der Ebene. Geben Sie einen Algorithmus an, der die k Schnittpunkte der Strecken in Zeit $O((k+n)\log n)$ berechnet. Sie dürfen annehmen, dass sich die Strecken in „allgemeiner Lage“ befinden, d.h., dass alle Streckenendpunkte und Schnittpunkte paarweise verschiedene x-Koordinaten und die Strecken paarweise verschiedene Steigungen haben. Insbesondere gibt es also keine vertikalen Strecken. Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Die Korrektheit brauchen Sie nicht nachzuweisen.

Aufgabe 5 (4 PUNKTE)
Sei S eine Menge von n Punkten in der Ebene, die so liegen, dass der kleinste S einschließende Kreis durch genau drei Punkte aus S bestimmt wird, alle übrigen Punkte aus S liegen im Kreisinneren.
Wir betrachten die Punkte in zufälliger Reihenfolge (jede Reihenfolge ist gleichwahrscheinlich) und fügen sie einen nach dem anderen hinzu und berechnen jeweils den kleinsten Kreis, der alle bislang betrachteten Punkte einschließt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der kleinste S einschließende Kreis erst bei Hinzufügen des letzten Punktes gefunden, d.h., zum ersten Mal berechnet wird? Begründen Sie ihre Antwort.



Aufgabe 6 (8 PUNKTE)
In der folgenden Abbildung sind die Teile der Voronoidiagramme einer Punktmenge L (grün) und einer Punktmenge R (orangefarben gestrichelt) innerhalb eines Quadrates dargestellt. Die Punkte in L liegen links der Vertikalen, die das Quadrat halbiert, die Punkte R rechts davon. Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf des Bisektors $\mathcal{B}(L, R)$!