Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

21. Juli 2016, 11:00 - 13:00 Uhr

Name, Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

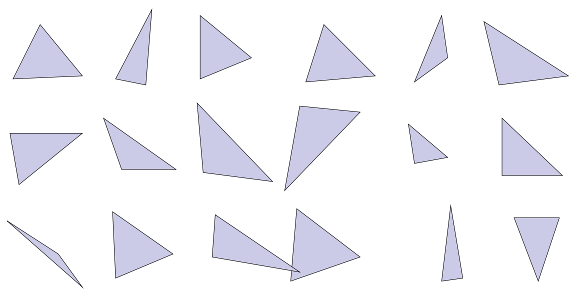
Anzahl Doppelbögen: ____________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	6
Gesamtpunktzahl:	49

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

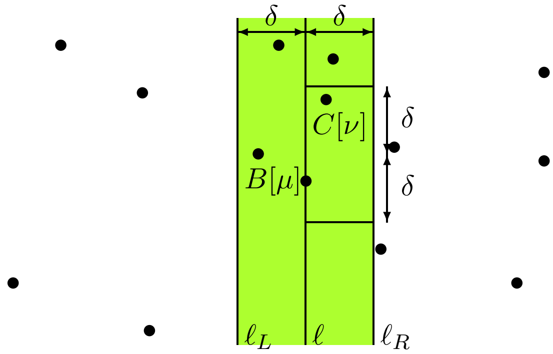
Aufgabe 1 (9 PUNKTE)



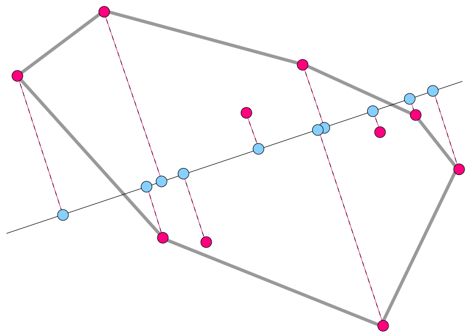
Sei D eine Menge von n Dreiecken in der Ebene. Sie dürfen annehmen, dass die Eckpunkte der Dreiecke paarweise verschiedene x-Koordinaten haben.
Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ testet, ob es in D ein Paar verschiedener Dreiecke gibt, die nicht disjunkt sind, d.h., die einen Punkt, sei es auf dem Rand oder im Inneren, gemeinsam haben. Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit im schlechtesten Fall erreicht. Sie dürfen dabei annehmen, dass eine Funktion existiert, die in konstanter Zeit testet, ob zwei gegebene Dreiecke disjunkt sind. Die Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie nicht nachzuweisen.

Aufgabe 2 (11 PUNKTE)

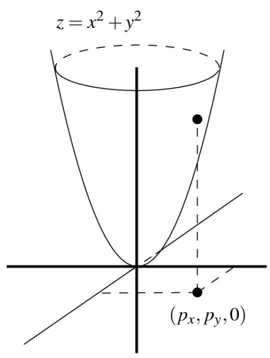
Sei P eine Menge von Punkten in der Ebene und sei $n = |P|$. Geben Sie einen Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der den kleinsten Euklidischen Abstand zweier verschiedener Punkte in P in Zeit $O(n(\log n)^2)$ berechnet, also den Abstand eines Closest-Pairs in P. Begründen Sie, warum ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Zur Korrektheit brauchen Sie ausnahmsweise nichts zu sagen.



Aufgabe 3 (9 PUNKTE)
Sei $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ eine Folge von n Punkten in der Ebene sortiert nach den x-Koordinaten ihrer Projektionspunkte auf eine nicht-vertikale Gerade ℓ. Die Projektionspunkte seien paarweise verschieden. Geben Sie einen Algorithmus an, der unter diesen Voraussetzungen die konvexe Hülle der Punkte in Zeit $O(n)$ berechnet und begründen Sie, warum der Algorithmus diese Laufzeit erreicht. Zur Korrektheit brauchen Sie ausnahmsweise nichts zu sagen. (Falls Sie keinen Algorithmus angeben können, der die geforderte Laufzeit erreicht, geben Sie einen Algorithmus an, der die konvexe Hülle der Punkte in Zeit $O(n \log n)$ bestimmt.)



Aufgabe 4 (8 PUNKTE)
Wir betrachten die aus der Vorlesung bekannte Lifting Map $\mathscr{L}$, die im $\mathbb{R}^3$ Punkte aus der $Z = 0$ Ebene auf das Paraboloid $Z = X^2 + Y^2$ abbildet. Gegeben seien drei Kreise C_1, C_2 und C_3 in der $Z = 0$ Ebene im $\mathbb{R}^3$. Ferner sei h_i die Ebene, deren Schnitt mit dem Paraboloid rückprojeziert auf die $Z = 0$ Ebene den Kreis C_i ergibt, und sei H_i^+ der Halbraum oberhalb von h_i einschließlich h_i. Schließlich sei $H = \bigcap H_i^+$. Im Folgenden sind mögliche Szenarien für H und für die relative Lage von H zum Paraboloid beschrieben. Ordnen Sie den vier in der weiter unten folgenden Abbildung dargestellten Anordnungen von drei Kreisen jeweils das dazugehörige Szenario zu:



[Quelle: de Berg et al.]

(1) Der Rand von H besteht aus zwei Flächen und einer Geraden, die das Paraboloid nicht schneidet.

(2) Der Rand von H besteht aus zwei Flächen und einer Geraden, die das Paraboloid in zwei Punkten schneidet.

(3) Der Rand von H besteht aus drei Flächen, drei Strahlen und einem Punkt, wobei ein Strahl zwei Schnittpunkte mit dem Paraboloid besitzt, die beiden anderen keinen.

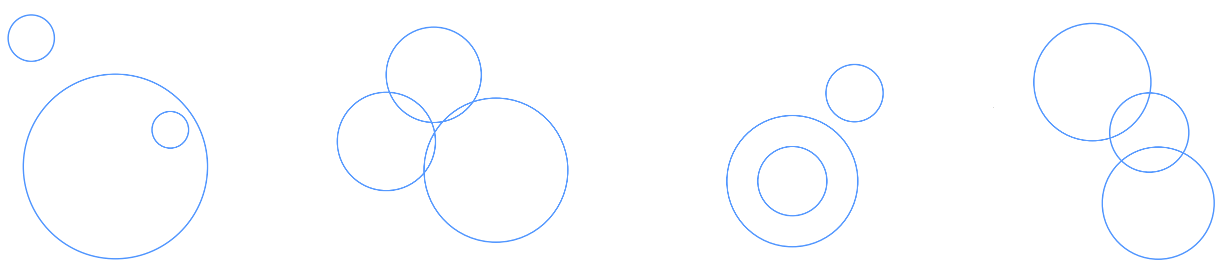
(4) Der Rand von H besteht aus drei Flächen, drei Strahlen und einem Punkt, wobei jeder der Strahlen zwei Schnittpunkte mit dem Paraboloid besitzt.

(5) Der Rand von H besteht aus drei Flächen, drei Strahlen und einem Punkt, wobei jeder der Strahlen genau einen Schnittpunkte mit dem Paraboloid besitzt.

(6) Der Rand von H besteht aus drei Flächen, drei Strahlen und einem Punkt, wobei keiner der Strahlen einen Schnittpunkte mit dem Paraboloid besitzt.

(7) Der Rand von H besteht aus drei Flächen, drei Strahlen und einem Punkt, wobei genau zwei der drei Strahlen zwei Schnittpunkte mit dem Paraboloid besitzten, der dritte keinen.

(8) Der Rand von H besteht aus einer der Ebenen.



(a) (b) (c) (d)

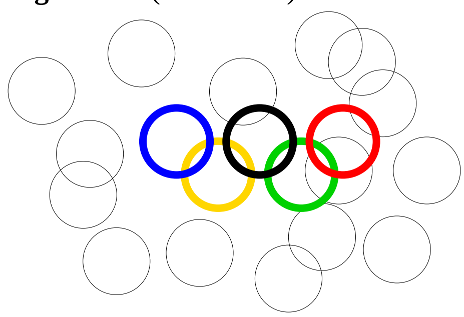
Aufgabe 5 (8 PUNKTE)

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?

2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr	falsch	
◯	◯	Für alle $n \geq 10$ gibt es eine Konfiguration von n Punkten in der Ebene, deren Delaunaytriangulation aus $3n - 6$ Kanten besteht.
◯	◯	Für alle $n \geq 10$ gibt es eine Konfiguration von n Punkten in der Ebene, deren Delaunaytriangulation einen Punkt mit $n - 1$ inzidenten Kanten enthält.
◯	◯	K_6, der vollständige Graph mit 6 Knoten, ist planar.
◯	◯	Man kann in Zeit $O(n^2)$ testen, ob eine Menge von n Punkten in der Ebene 4 Punkte enthält, die auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 6 (4 PUNKTE)



Sei S eine Menge von n Kreisen in der Ebene. Genau fünf davon bilden die olympischen Ringe. Die Kreise werden in zufälliger Reihenfolge gezeichnet, wobei jede Reihenfolge gleichwahrscheinlich ist.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die olympischen Ringe erst nach Zeichnen des letzten Kreises zum ersten Mal zu sehen sind? Begründen Sie ihre Antwort.