Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

2. Februar 2017, 11:00 - 13:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

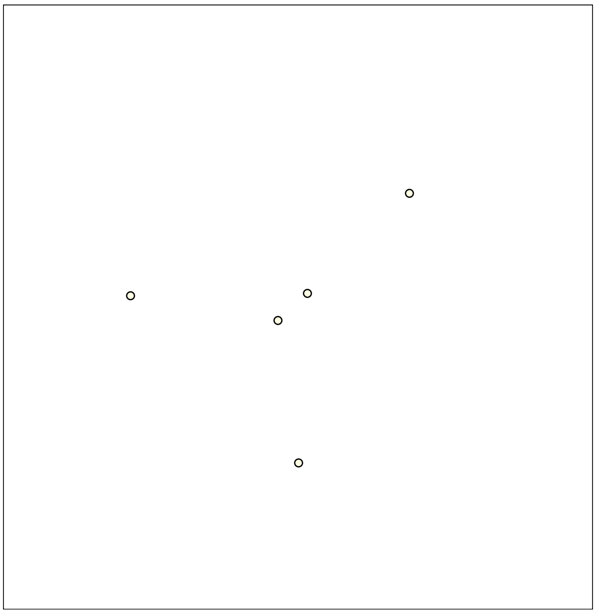
Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	6
Gesamtpunktzahl:	53

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

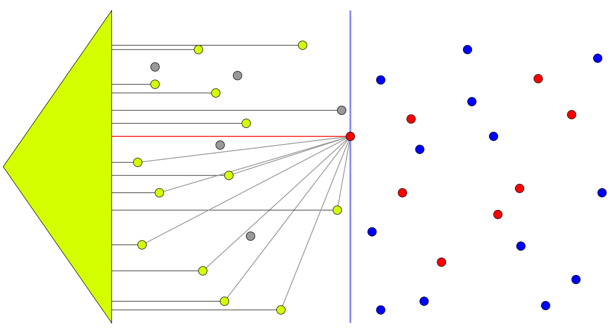
Aufgabe 1 (8 PUNKTE)

Skizzieren Sie das Voronoidiagramm der 5 Punkte in der folgenden Abbildung innerhalb des umschließenden Rechtecks.

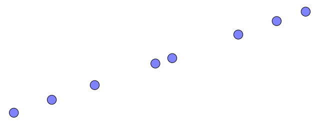


Aufgabe 2 (12 PUNKTE)

Gegeben sei eine Menge von n roten Punkten und eine Menge von n blauen Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene. Gesucht ist ein roter Punkt, der maximal viele blaue Punkte dominiert, wobei ein Punkt $p = (p_x, p_y)$ einen Punkt $q = (q_x, q_y)$ genau dann dominiert, wenn $p_x \geq q_x$ und $p_y \geq q_y$ gilt. Geben Sie einen Algorithmus an, der einen solchen maximal dominanten roten Punkt in Zeit $O(n \log n)$ bestimmt Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Zur Erinnerung: Ein Order-Statistics Tree ist ein balancierter binärer Suchbaum, der u.a. zusätzlich die Operation RANK in logarithmischer Zeit unterstützt. In einem Order-Statistics Tree T bestimmt $T.\text{RANK}(x)$ Anzahl der Elemente in T, die kleiner sind als x. Begründen Sie die Korrektheit ihres Algorithmus.



Aufgabe 3 (8 PUNKTE)
Sei $\mathscr{D}$ die aus der Vorlesung bekannte Dualitätsabbildung, die Punkte auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt. Sei P eine Menge von k Punkten, die alle auf einer nicht-vertikalen Geraden liegen, und $L = \{\mathscr{D}(p) \mid p \in P\}$ die Menge der zu den Punkten in P dualen Geraden. Ferner sei $\mathcal{A}(L)$ das Arrangement der Geraden in L.



(a) Aus wie vielen Knoten besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)
(b) Aus wie vielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)
(c) Aus wie vielen Zellen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)
(d) Aus wie vielen Kanten besteht das Delaunaydiagramm von P? (ohne Beweis)

Aufgabe 4 (7 PUNKTE)

(a) Sei G ein zusammenhängender einfacher dreiecksfreier kreuzungsfrei eingebetteter planarer Graph mit n Knoten, $n \geq 4$. Dreiecksfrei bedeutet, dass es in der Einbettung von G kein Gebiet gibt, das von höchstens 3 Kanten begrenzt wird. Beweisen Sie, dass G höchstens $2n - 4$ Kanten besitzt.

(b) $K_{3,3}$ bezeichne wie in der Vorlesung den vollständigen bipartiten Graphen mit drei Knoten auf jeder Seite. Beweisen Sie, dass der $K_{3,3}$ nicht planar ist.

In central Spain in mainly rain
Three houses stood upon the plain.
The houses of our mystery
To which, from realms of industry
Flowed pipes and wires to light and heat
And other pipes with water sweet.
The owners said "What these things cross
Burn, leak or short, we'll suffer loss,
So let a graphman living near
Plan each from each to keep them clear."
Tell them, graphman, come in vain,
They'll bear one cross that must remain.
Explain the planeness of the plain.
- Blanche Descartes, Waterloo, 1997

Aufgabe 5 (8 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr falsch

○ ○ Gegeben sei eine Menge D von n Kreisscheiben. Man kann in Zeit $O(n \log n)$ testen, ob die Kreisscheiben in D paarweise disjunkt sind.

○ ○ Für $n \geq 381$ gibt es jeweils keine Konfiguration von n Punkten in der Ebene, deren Delaunaytriangulation mindestens einen Knoten vom Grad mindestens $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ enthält.

○ ○ Sei S eine Menge von n Punkten in der Ebene. Dann lässt sich ein Closest-Pair in S, also ein Paar von Punkten mit minimalem Abstand, in Zeit $O(\frac{n}{\log n})$ bestimmen.

○ ○ Wenn die n Punkte einer Punktmenge bereits nach x-Koordinate sortiert vorliegen, so kann man mit einem auf Plane-Sweep und Rotating-Calipers basierenden Algorithmus ein Punktepaar mit maximalem Abstand in linearer Zeit finden.

Aufgabe 6 (10 PUNKTE)
Geben Sie einen Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der die konvexe Hülle $CH(S)$ einer Menge S von n Punkten in der Ebene in Zeit $O(n \log n)$ berechnet. Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Zur Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie ausnahmsweise nichts zu sagen.