Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

20. Juli 2017, 10:00 - 12:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	5
Gesamtpunktzahl:	49

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5

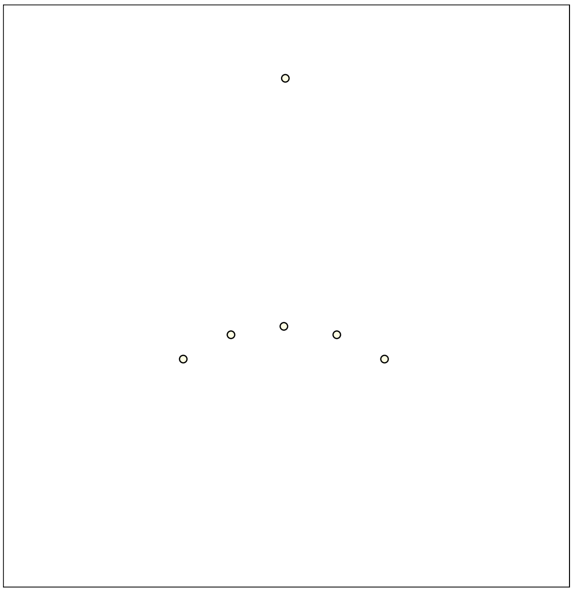
Aufgabe 1 (9 PUNKTE (5 + 4))

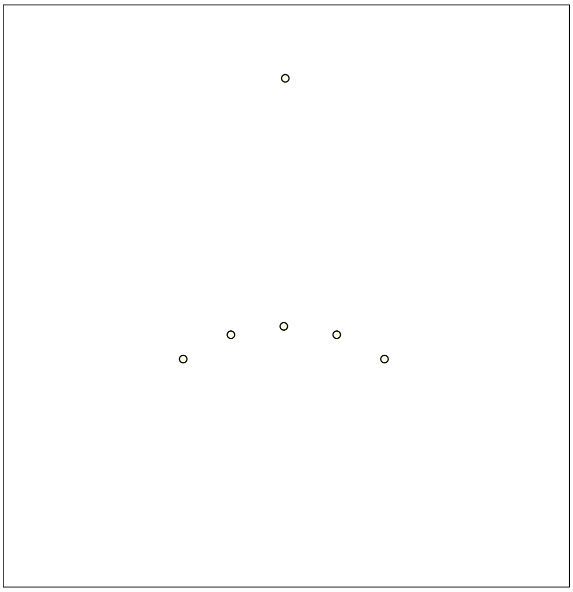
(a) Beweisen Sie mit Hilfe der Euler-Formel $n - e + f = 2$ für zusammenhängende, kreuzungsfreie geometrische Graphen mit $n \geq 3$ Knoten, e Kanten und f Flächen, dass jeder schlichte kreuzungsfreie geometrische Graph mit $n \geq 3$ Knoten höchstens $3n - 6$ Kanten besitzt.

(b) Sei T eine Triangulierung einer Menge von $n \geq 3$ Punkten in der Ebene, in der es einen Punkt vom Grad $n - 1$ gibt, also einen Punkt, der mit jedem anderen verbunden ist. Zeigen Sie, dass es dann auch einen Punkt geben muss, dessen Grad höchstens 4 ist.

Aufgabe 2 (11 PUNKTE (8 + 3))

Skizzieren Sie in den beiden folgenden identischen Abbildungen links das Voronoidiagramm der 6 Punkte innerhalb des umschließenden Rechtecks und rechts den minimalen aufspannenden Baum der 6 Punkte, jeweils bezüglich des Euklidschen Abstandes. Beachten Sie, dass die unteren 5 Punkte auf einem Kreisbogen liegen.



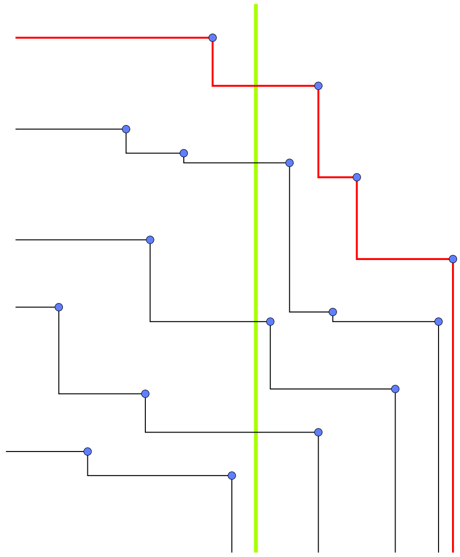


Aufgabe 3 (13 PUNKTE (3 + 10))

In der Vorlesung haben wir Algorithmen zum Bestimmen der Maxima einer Punktmenge P in der Ebene kennengelernt. Sei $\mathrm{MAX}(P)$ die Menge der maximalen Punkte in P. Wir können die n Punkte in P nun weiter kategorisieren, indem wir die maximalen Punkte unter den Punkten bestimmen, die in P nicht maximal sind, also $\mathrm{MAX}(P - \mathrm{MAX}(P)\ )$, und so weiter.

Auf diese Weise können wir P in k Teilmengen partitionieren, wobei k zwischen 1 und n variieren kann. Wir nennen diese Mengen die Maximaschichten von P. Gesucht ist ein möglichst effizienter Algorithmus, der alle Maximaschichten von P bestimmt.

(a) Welche Laufzeit ergibt sich im schlechtesten Fall, wenn wir die Schichten eine nach der anderen jeweils mit dem aus der Vorlesung bekannten $O(n \log n)$ Algorithmus bestimmen? Begründen Sie ihre Antwort.



(b) Jeder Schicht läßt sich ein (verallgemeinerter) Polygonzug zuordnen: Sei $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_\ell, y_\ell)$ die aufsteigend nach x-Koordinaten (und damit absteigend nach y-Koordinaten) sortierte Folge der Punkte in einer Maximaschicht. Der zugehörige Polygonzug ist dann $(-\infty, y_1), (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_3), \ldots, (x_{\ell-1}, y_\ell), (x_\ell, y_\ell), (x_\ell, -\infty)$. Geben Sie einen Plane-Sweep Algorithmus an, der alle Schichten in Zeit $O(n \log n)$ bestimmt! Ihr Algorithmus sollte die Ebene von rechts nach links mit einer vertikalen Geraden übersweepen und die Interaktion der Sweeplinie mit den Polygonzügen in einer geeigneten Datenstruktur verwalten. Mit Hilfe dieser Datenstruktur sollen die Punkte während des Sweeps den Schichten korrekt zugeordnet werden. Begründen Sie, dass der resultierende Algorithmus die geforderte Laufzeitschranke erreicht.

Aufgabe 4 (6 PUNKTE)

Wir betrachten die randomisiert-inkrementelle Konstruktion der Delaunay-Triangulierung der Eckpunktmenge eines konvexen Polygons (in allgemeiner Lage):

CONVEXPOLYGONDT(S)

1 **if** $|S| \leq 3$
2 **then** …
3 $q \leftarrow$ zufälliger Punkt in S mit Nachbarn p und r
4 $S' \leftarrow S - \{q\}$
5 $T \leftarrow$ CONVEXPOLYGONDT(S')
6 füge $\Delta(pqr)$ zu T hinzu
7 $B \leftarrow$ Menge schlechter Dreiecke in T
8 entferne alle Dreiecke in B aus T
9 retrianguliere das entstandene Gebiet durch Hinzufügen von Diagonalen zum Eckpunkt q

Sei n die Anzahl der Eckpunkte. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die Laufzeit der Zeilen 6-9 in $O(|B|)$ ist und die der Zeilen 1 und 2 in $O(1)$, die erwartete Laufzeit des Algorithmus asymptotisch. Zur Erinnerung: Die Delaunay-Triangulierung besteht unter den gegebenen Bedingungen aus $2n - 3$ Kanten.

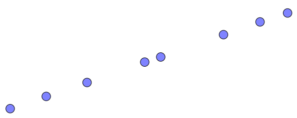
Aufgabe 5 (10 PUNKTE)

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?

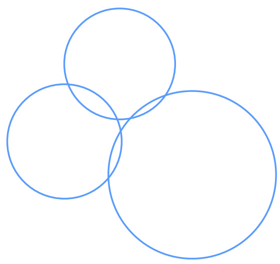
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr falsch

○ ○ Sei P eine Menge von n Punkten, die alle auf einer nicht-vertikalen Geraden liegen und L die Menge der zu den Punkten in P dualen Geraden unter parabolischer Dualität. Dann gibt es im schlechtesten Fall $\Omega(n \log n)$ viele verschiedene Schnittpunkte zwischen den Geraden aus L.

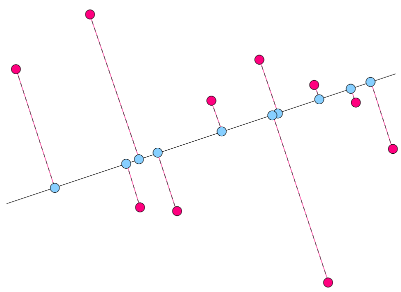


○ ○ Gegeben seien drei Kreise C_1, C_2 und C_3 in der $Z = 0$ Ebene im $\mathbb{R}^3$. Ferner sei h_i die Ebene, deren Schnitt mit dem Paraboloid $Z = X^2 + Y^2$ rückprojeziert auf die $Z = 0$ Ebene den Kreis C_i ergibt. Schließlich sei H_i^+ der Halbraum oberhalb von h_i einschließlich h_i und $H = \bigcap H_i^+$. Falls der Rand von H aus zwei Flächen und einer Geraden besteht, die das Paraboloid in zwei Punkten schneidet, so sind die zugehörigen Kreise wie in der folgenden Abbildung angeordnet:



○ ○ Für jedes $n \geq 6$ gibt es eine Menge K von n Kreisscheiben, so dass fast alle der quadratisch vielen Schnittpunkte zwischen den Kreisen, genauer gesagt $\Omega(n^2)$ viele, auf dem Rand der Vereinigung der Kreisscheiben liegen.

○ ○ Falls $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ eine Folge von n Punkten in der Ebene ist, die bereits sortiert nach den x-Koordinaten ihrer paarweise verschieden Projektionspunkte auf eine nicht-vertikale Gerade ℓ vorliegen, so kann man den Durchmesser der Punktmenge in Zeit $O(n)$ bestimmen.



○ ○ Es gibt einen Algorithmus, der für eine gegebene Menge P von n Punkten in Zeit $O(n^2)$ entscheidet, ob P drei kollineare Punkte enthält, also drei Punkte, die auf einer Geraden liegen.