Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

1. Februar 2018, 11:00 - 13:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

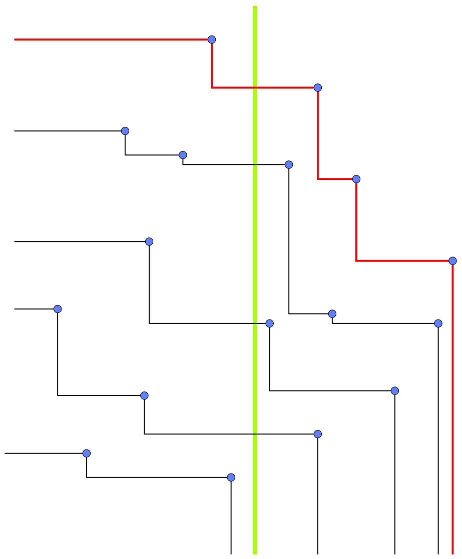
Anzahl Doppelbögen: ______________________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	5
Gesamtpunktzahl:	49

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5

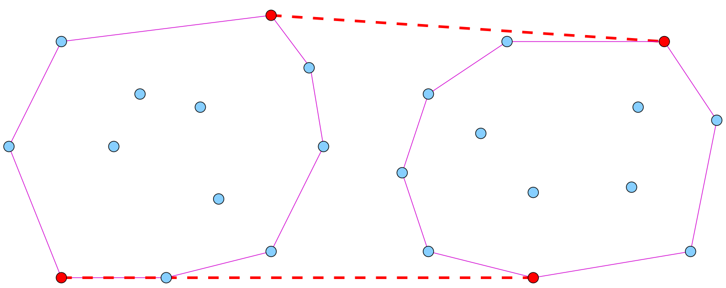
Aufgabe 1 (11 PUNKTE)



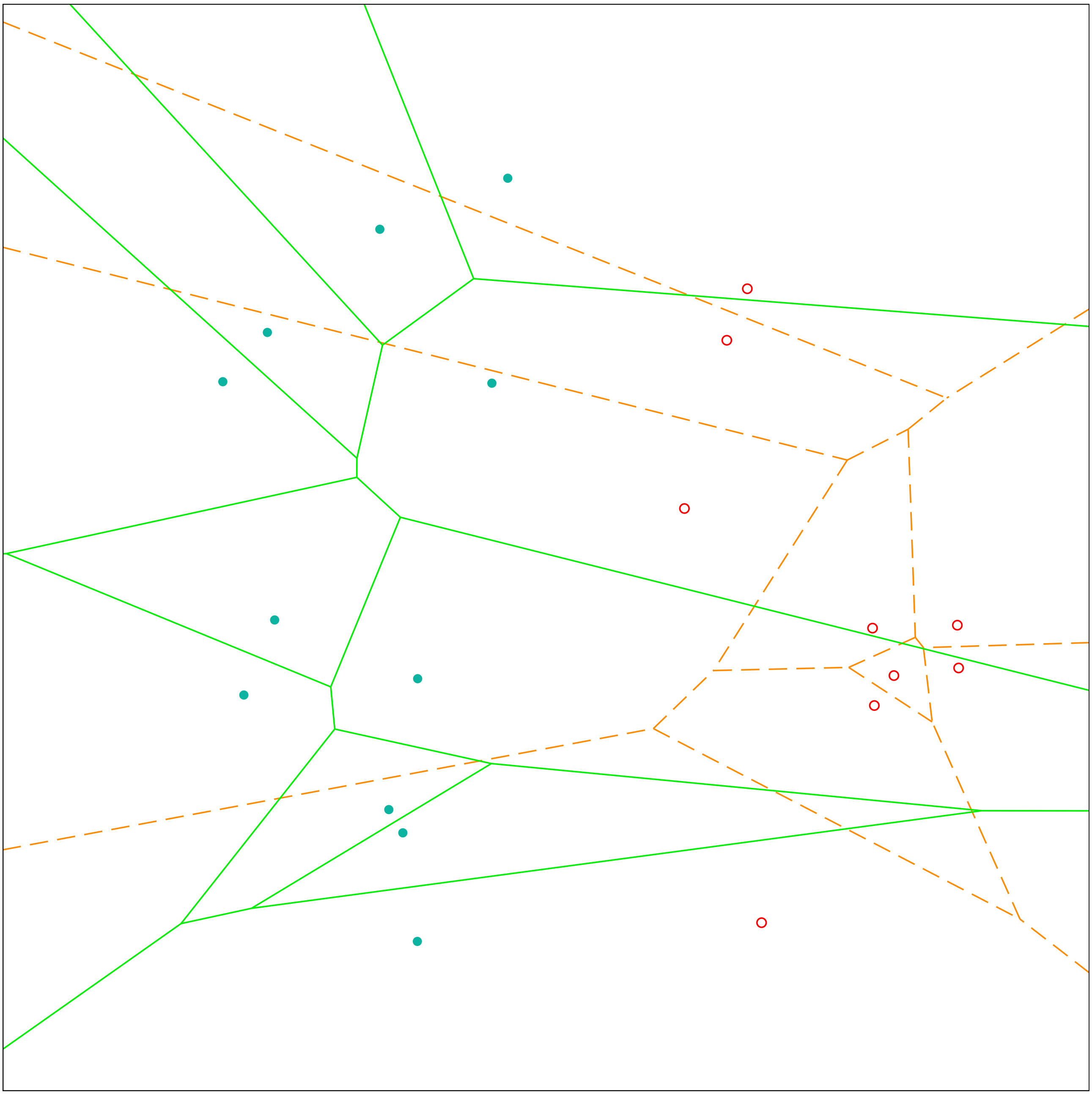
Sei $\mathrm{MAX}(P)$ die Menge der maximalen Punkte in einer Menge P von n Punkten in der Ebene. Wir können die n Punkte in P rekursiv partitionieren, indem wir die maximalen Punkte unter den Punkten bestimmen, die in P nicht maximal sind, also $\mathrm{MAX}(P - \mathrm{MAX}(P)\ )$, und so weiter, bis alle verbliebenen Punkte maximal sind. Die Anzahl k der entstehenden Teilmengen kann dabei zwischen 1 und n variieren. Wir nennen die Teilmengen die Maximaschichten von P. Jeder Schicht läßt sich ein (verallgemeinerter) Polygonzug zuordnen: Sei $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_\ell, y_\ell)$ die aufsteigend nach x-Koordinaten (und damit absteigend nach y-Koordinaten) sortierte Folge der Punkte in einer Maximaschicht. Der zugehörige Polygonzug ist dann $(-\infty, y_1), (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_3), \ldots, (x_{\ell-1}, y_\ell), (x_\ell, y_\ell), (x_\ell, -\infty)$. Geben Sie einen Plane-Sweep Algorithmus an, der alle Maximaschichten möglichst effizient bestimmt! Ihr Algorithmus könnte die Ebene von rechts nach links mit einer vertikalen Geraden übersweepen und die Interaktion der Sweeplinie mit den Polygonzügen in einer geeigneten Datenstruktur verwalten. Mit Hilfe dieser Datenstruktur könnten die Punkte während des Sweeps den Schichten korrekt zugeordnet werden. Begründen Sie, dass ihr Algorithmus korrekt ist. Bestimmen Sie die Laufzeit ihres Algorithmus.

Aufgabe 2 (10 PUNKTE)

Geben Sie einen Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der die konvexe Hülle $CH(S)$ einer Menge S von n Punkten in der Ebene in Zeit $O(n \log n)$ berechnet. Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Zur Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie ausnahmsweise nichts zu sagen.



Aufgabe 3 (8 PUNKTE)
In der folgenden Abbildung sind die Teile der Voronoidiagramme einer Punktmenge L und einer Punktmenge R (gestrichelt) innerhalb eines Quadrates dargestellt. Die Punkte in L liegen links der Vertikalen, die das Quadrat halbiert, die Punkte R rechts davon. Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf des Bisektors $\mathcal{B}(L, R)$!

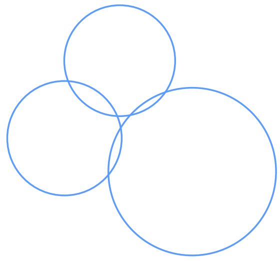


Aufgabe 4 (12 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

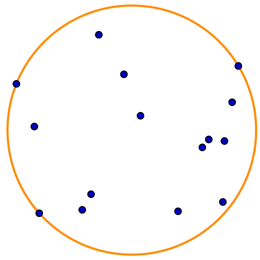
wahr	falsch	
◯	◯	Wenn die n Punkte einer Punktmenge bereits nach x-Koordinate sortiert vorliegen, so kann man mit einem auf Plane-Sweep und Rotating-Calipers basierenden Algorithmus ein Punktepaar mit maximalem Abstand in linearer Zeit finden.
◯	◯	Für jedes $n \geq 6$ gibt es eine Menge K von n Kreisscheiben, so dass fast alle der quadratisch vielen Schnittpunkte zwischen den Kreisen, also $\Omega(n^2)$ viele, auf dem Rand der Vereinigung der Kreisscheiben liegen.

wahr falsch

○ ○ Gegeben seien drei Kreise C_1, C_2 und C_3 in der $Z = 0$ Ebene im $\mathbb{R}^3$. Ferner sei h_i die Ebene, deren Schnitt mit dem Paraboloid $Z = X^2 + Y^2$ projeziert auf die $Z = 0$ Ebene den Kreis C_i ergibt. Schließlich sei H_i^+ der Halbraum oberhalb von h_i einschließlich h_i und $H = \bigcap H_i^+$. Falls die drei Kreise wie in der folgenden Abbildung angeordnet sind, so besteht der Rand von H aus drei Flächen und aus drei Geraden, die das Paraboloid jeweils in zwei Punkten schneiden.



○ ○ Sei S eine Menge von n Punkten in der Ebene, die so liegen, dass der kleinste S einschließende Kreis durch genau drei Punkte aus S bestimmt wird. Es liegen also auf dem kleinsten S einschließenden Kreis genau drei Punkte aus S, alle übrigen Punkte aus S liegen im Inneren. Werden die Punkte in zufälliger Reihenfolge (jede Reihenfolge ist gleichwahrscheinlich) eingefügt und jeweils der kleinste einschließende Kreis der bereits eingefügten Punkte berechnet, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der kleinste S einschließende Kreis erst bei Hinzufügen des letzten Punktes zum ersten Mal gefunden wird, $\frac{3}{n}$.



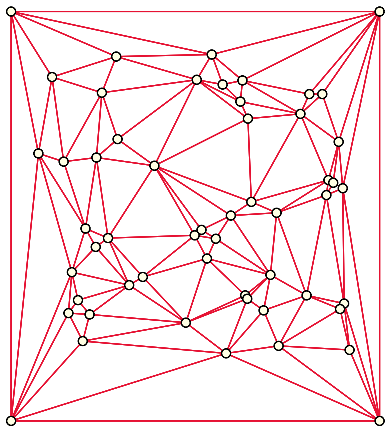
○ ○ Gegeben sei eine Menge S von n Strecken in der Ebene. Man kann in Zeit $O(n \log n)$ testen, ob die Strecken in S paarweise disjunkt sind.

○ ○ Es gibt Arrangements von $n \geq 10$ Geraden in der Ebene, die aus $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ Zellen bestehen.

Aufgabe 5 (8 PUNKTE)

(a) Wie lautet die Euler-Formel für zusammenhängende, kreuzungsfreie geometrische Graphen mit $n \geq 3$ Knoten, e Kanten und f Flächen? (ohne Beweis)

(b) In der nebenstehenden Abbildung sehen Sie die Delaunaytriangulierung der 4 Eckpunkte eines Rechtecks und 50 weiterer Punkte im Innern des Rechtecks.



(i) Aus wie vielen Kanten besteht die Delaunaytriangulierung? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Aus wie vielen Dreiecken besteht die Delaunaytriangulierung? Begründen Sie Ihre Antwort.