Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

19. Juli 2018, 11:00 - 13:00 Uhr

Name, Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

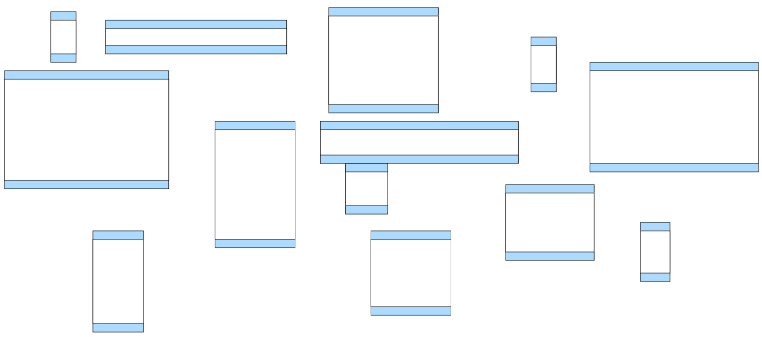
Anzahl Doppelbögen: ____________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	7
Gesamtpunktzahl:	50

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

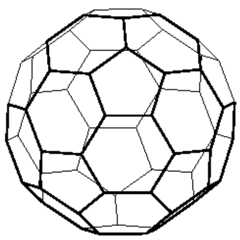
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Aufgabe 1 (10 PUNKTE)



Sei $\mathscr{R}$ eine Menge nicht ineinander verschachtelter achsenparalleler Rechtecke in der Ebene. Wie üblich sei $n = |\mathscr{R}|$ die Anzahl der Rechtecke. Sie dürfen annehmen, dass die linken unteren und rechten oberen Eckpunkte der Rechtecke paarweise verschiedene x-Koordinaten haben. Der vertikale Abstand zweier achsenparalleler Rechtecke ist unendlich, falls es keine vertikale Gerade gibt, die beide Rechtecke schneidet. Ansonsten ist der vertikale Abstand der Abstand zwischen den Schnittintervallen der beiden Rechtecke mit einer vertikalen Geraden, die beide schneidet. Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ testet, ob es in $\mathscr{R}$ Rechtecke gibt, deren vertikaler Abstand höchstens 2Δ ist. Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit im schlechtesten Fall erreicht, und begründen Sie die Korrektheit ihres Algorithmus.

Aufgabe 2 (7 PUNKTE)



(a) Jedes beschränkte konvexe Polyeder mit n Eckpunkten, e Kanten und f Flächen erfüllt die Euler-Formel $n - e + f = 2$. Sei P ein Polyeder, bei dem alle Seitenflächen Fünfecke oder Sechsecke sind oder noch mehr Eckepunkte besitzen. Das links abgebildete klassische Fussballpolyeder ist ein solches. Beweisen Sie, dass ein solches Polyeder höchstens $\frac{5}{3}n - \frac{10}{3}$ Kanten besitzt.

(b) Beweisen Sie, dass ein solches Polyeder nicht mehr als $\frac{2}{3}n$ Flächen besitzt.

Aufgabe 3 (6 PUNKTE)

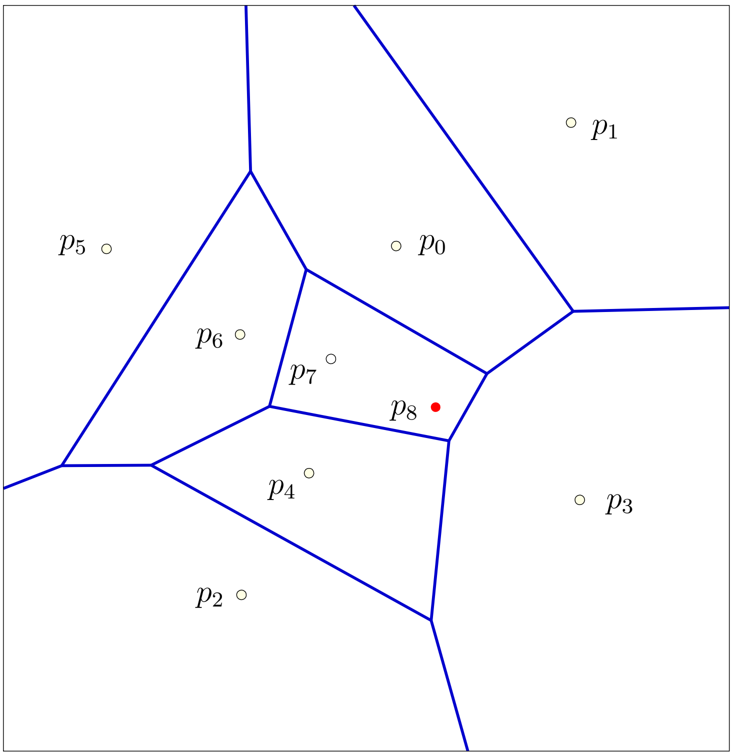
Sei L eine Menge von n Geraden in allgemeiner Lage in der Ebene. $\mathcal{A}(L)$ bezeichne das Arrangement der Geraden in L.

(a) Aus wie vielen Knoten besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(b) Aus wie vielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

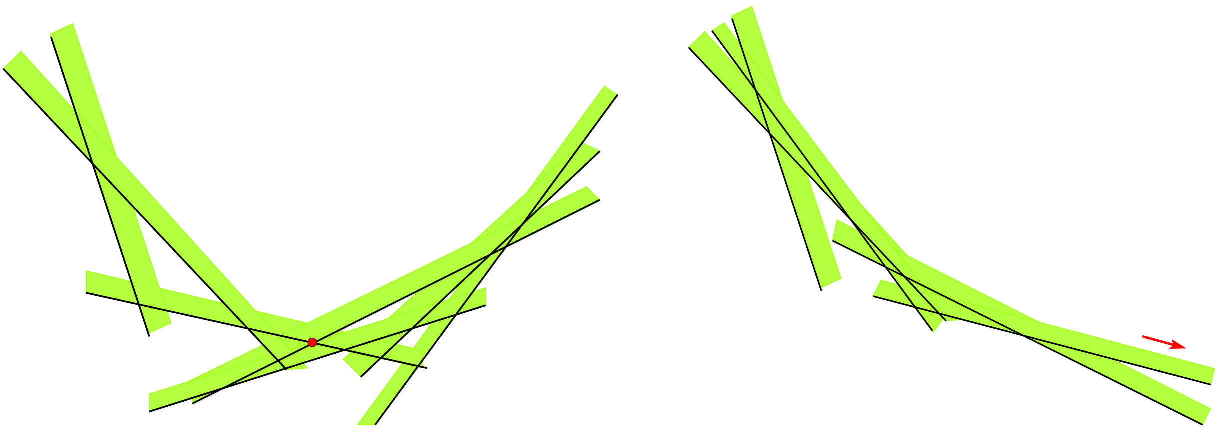
(c) Aus wie vielen Zellen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

Aufgabe 4 (6 PUNKTE)
In der Abbildung unten ist das Voronoidiagramm (genau genommen, ein Ausschnitt aus dem Voronoidiagramm) einer Menge $\{p_0, \ldots, p_7\}$ von 8 Punkten zu sehen sowie ein weiterer Punkt p_8.



Skizzieren Sie (in diese Abbildung) das Voronoidiagramm der Punktmenge $\{p_0, \ldots, p_8\}$, also das Voronoidiagramm, das nach Hinzufügen von p_8 entsteht.

Aufgabe 5 (9 PUNKTE)
Sei L eine Menge von n Geraden in der Ebene. Keine der Geraden in L sei eine vertikale. Gesucht ist der tiefste Punkt auf der oberen Einhüllenden der Geraden.



(a) Geben Sie einen Algorithmus an, der den tiefsten Punkt auf der oberen Einhüllenden der Geraden in L mit Hilfe randomisiert inkrementeller Konstruktion in erwartet linearer Zeit berechnet. Die Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie nicht nachzuweisen.

(b) Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht.

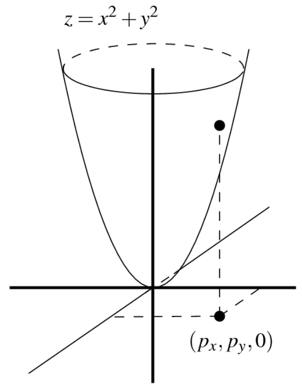
Aufgabe 6 (4 PUNKTE)

Sei $\mathscr{L} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$(x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2)$$

Sei P eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene und $\mathscr{L}(P)$ die Menge der Bildpunkte von P unter der Abbildung $\mathscr{L}$.

Clemens Clever behauptet, dass die konvexe Hülle $CH(\mathscr{L}(P))$ der Bildpunkte von P im $\mathbb{R}^3$ mindestens so viele Kanten enthält wie jede Triangulierung von P in der Ebene. Hat er recht? Begründen Sie ihre Antwort.



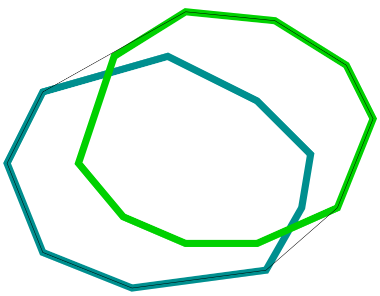
[Source: de Berg et al.]

Aufgabe 7 (8 PUNKTE)

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?

2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr	falsch	
◯	◯	Ein zweidimensionales Lineares Programm mit n Nebenbedingungen kann man mit einem randomisierten Algorithmus in erwarteter Laufzeit in $O(n)$ lösen.
◯	◯	Sei S eine Menge von n Strecken in der Ebene. Es gibt einen Algorithmus, der in Zeit $O(n \log n)$ testet, ob die Strecken in S paarweise disjunkt sind.
◯	◯	Man kann in Zeit $O(n^2)$ testen, ob eine Menge von n Punkten in der Ebene 5 Punkte enthält, die alle auf der gleichen Geraden liegen.



◯	◯	Die konvexe Hülle der n Eckpunkte zweier durch die Folge ihrer Eckpunkte im Gegenuhrzeigersinn gegebener konvexer Polygone kann in Zeit $O(n)$ bestimmt werden.