Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

31. Januar 2019, 11:00 - 13:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

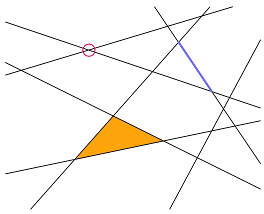
Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	6
Gesamtpunktzahl:	50

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6

Aufgabe 1 (9 PUNKTE)
Sei L eine Menge von n Geraden in allgemeiner Lage in der Ebene. Ferner bezeichne $\mathcal{A}(L)$ das Arrangement der Geraden in L.



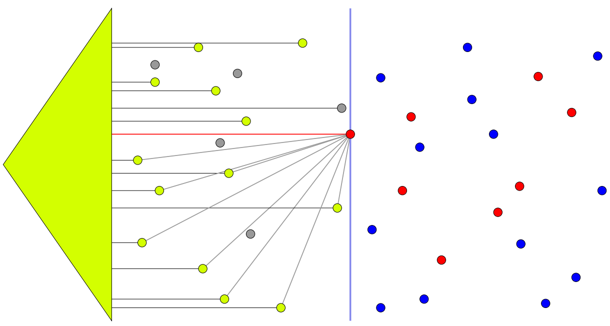
(a) Aus wie vielen Knoten besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(b) Aus wie vielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(c) Aus wie vielen Zellen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(d) Wir konstruieren $\mathcal{A}(L)$ randomisiert inkrementell: Zunächst permutieren wir die Geraden zufällig und konstruieren $\mathcal{A}(L)$, in dem wir die Geraden in der durch die Permutation bestimmten Reihenfolge eine nach der anderen zum bisher konstruierten Arrangement hinzufügen. Alle Permutationen seien gleichwahrscheinlich. Wir betrachten einen beliebigen, aber festen Knoten v des Arrangements $\mathcal{A}(L)$. Wie wahrscheinlich ist es, dass v erst beim Hinzufügen der letzten Geraden entsteht? Begründen Sie ihre Antwort.

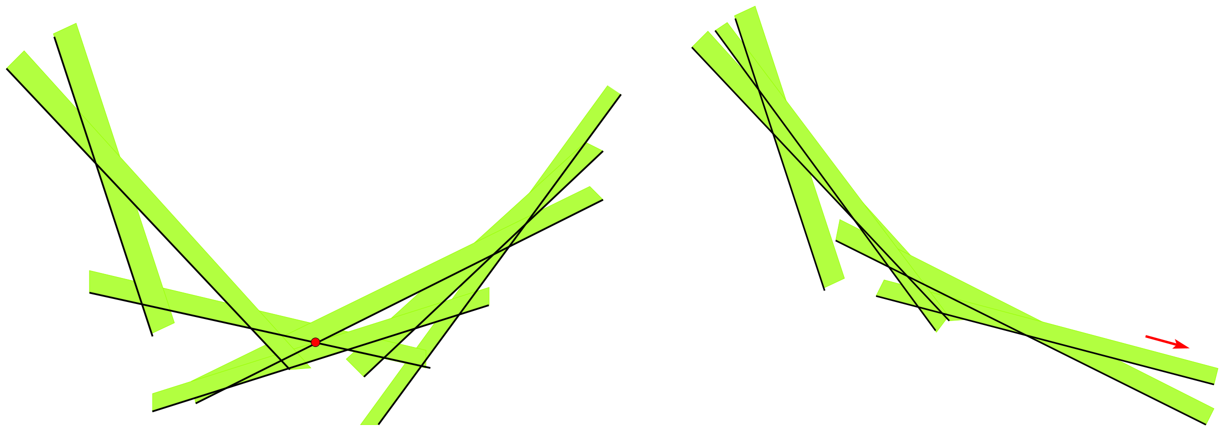
Aufgabe 2 (9 PUNKTE)
Gegeben sei eine Menge von n roten Punkten und eine Menge von n blauen Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene. Gesucht ist ein roter Punkt, der maximal viele blaue Punkte dominiert, wobei ein Punkt $p = (p_x, p_y)$ einen Punkt $q = (q_x, q_y)$ genau dann dominiert, wenn $p_x \geq q_x$ und $p_y \geq q_y$ gilt. Geben Sie einen Algorithmus an, der einen solchen maximal dominanten roten Punkt in Zeit $O(n \log n)$ bestimmt Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Zur Erinnerung: Ein Order-Statistics Tree ist ein balancierter binärer Suchbaum, der u.a. zusätzlich die Operation RANK in logarithmischer Zeit unterstützt. In einem Order-Statistics Tree T bestimmt T.RANK(x) Anzahl der Elemente in T, die kleiner sind als x. Die Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie nicht nachzuweisen.



Aufgabe 3 (8 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr	falsch	
◯	◯	Sei $\mathscr{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $(x, y) \mapsto (x, y, x^2+y^2)$. Sei P eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene und $\mathscr{L}(P)$ die Menge der Bildpunkte von P unter der Abbildung $\mathscr{L}$. Dann hat die konvexe Hülle $CH(\mathscr{L}(P))$ der Bildpunkte von P im $\mathbb{R}^3$ mindestens so viele Kanten wie jede Triangulierung von P in der Ebene.
◯	◯	Sei P ein konvexes Polygon in der Ebene, gegeben durch die Folge seiner n Eckpunkte im Gegenuhrzeigersinn. Ein flächenkleinstes, P umschließendes Rechteck kann in Zeit $O(n)$ berechnet werden.
◯	◯	In keiner Delaunaytriangulation einer Menge von $n \geq 10$ Punkten gibt es einen Punkt, der mehr als $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ inzidente Kanten besitzt.
◯	◯	Ein zweidimensionales Lineares Programm mit n Nebenbedingungen kann man mit einem randomisierten Algorithmus in erwarteter Laufzeit in $O(n)$ lösen.

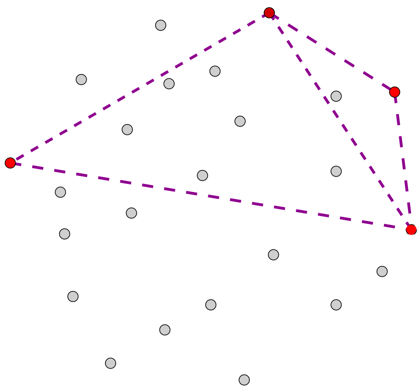
Aufgabe 4 (9 PUNKTE)
Sei L eine Menge von n Geraden in der Ebene. Keine der Geraden in L sei eine vertikale. Gesucht ist der tiefste Punkt auf der oberen Einhüllenden der Geraden.



(a) Geben Sie einen Algorithmus an, der den tiefsten Punkt auf der oberen Einhüllenden der Geraden in L mit Hilfe randomisiert inkrementeller Konstruktion in erwartet linearer Zeit berechnet. Die Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie nicht nachzuweisen.

(b) Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht.

Aufgabe 5 (8 PUNKTE)
Geben Sie den QUICKHULL-Algorithmus an, der die konvexe Hülle einer Menge von n Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene, von denen h Extrempunkte sind, in Zeit $O(nh)$ berechnet. Begründen Sie die Korrektheit ihres Algorithmus. Sich brauchen nicht nachzuweisen, dass der Algorithmus die angegebene Laufzeit erreicht!



Aufgabe 6 (7 PUNKTE)

(a) Sei G ein zusammenhängender einfacher dreiecksfreier kreuzungsfrei eingebetteter planarer Graph mit n Knoten, $n \geq 4$. Dreiecksfrei bedeutet, dass es in der Einbettung von G kein Gebiet gibt, das von höchstens 3 Kanten begrenzt wird. Beweisen Sie, dass G höchstens $2n-4$ Kanten besitzt. Sie dürfen dazu die Euler-Formel $n - e + f = 2$ für zusammenhängende eingebettete planare Graphen mit $n \geq 3$ Knoten, e Kanten und f Flächen benutzen.

(b) $K_{3,3}$ bezeichne wie in der Vorlesung den vollständigen bipartiten Graphen mit drei Knoten auf jeder Seite. Beweisen Sie, dass der $K_{3,3}$ nicht planar ist.

In central Spain in mainly rain
Three houses stood upon the plain.
The houses of our mystery
To which, from realms of industry
Flowed pipes and wires to light and heat
And other pipes with water sweet.
The owners said "What these things cross
Burn, leak or short, we'll suffer loss,
So let a graphman living near
Plan each from each to keep them clear."
Tell them, graphman, come in vain,
They'll bear one cross that must remain.
Explain the planeness of the plain.

- Blanche Descartes, Waterloo, 1997