Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

18. Juli 2019, 11:00 - 13:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	8
Gesamtpunktzahl:	50

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

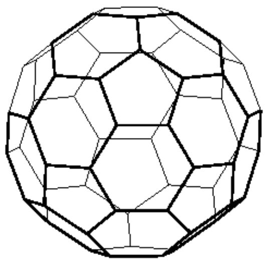
1	2	3	4	5	6	7	8

Aufgabe 1 (8 PUNKTE (2 + 2 + 4))

(a) Wie lautet die Euler-Formel für zusammenhängende, kreuzungsfreie geometrische Graphen mit $n \geq 3$ Knoten, e Kanten und f Flächen? (ohne Beweis)

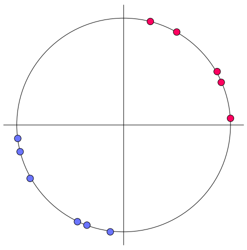
(b) Sei P eine Menge von $n \geq 4$ Punkten im $\mathbb{R}^3$ in allgemeiner Lage. Sei $CH(P)$ die konvexe Hülle von P. Aus wie vielen Kanten besteht die konvexe Hülle $CH(P)$ maximal? (ohne Beweis)

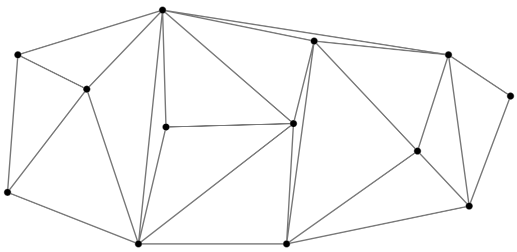
(c) Zeigen Sie, dass die konvexe Hülle $CH(P)$ aus Teil (b) stets eine Seitenfläche enthalten muss, die von höchstens 5 Kanten begrenzt wird.



Aufgabe 2 (5 PUNKTE)

Beweisen Sie eine $\Omega(n \log n)$ untere Schranke für das Diameter Problem, also das Problem, zu einer gegebenen Menge von Punkten ein Punktepaar mit maximalem Abstand zu bestimmen. Sie dürfen annehmen, dass folgendes Problem eine $\Omega(n \log n)$ untere Schranke hat: Gegeben zwei Mengen $A, B \subseteq [0, 1]$ mit zusammen n Elementen, entscheide ob $A \cap B = \emptyset$.





Aufgabe 3 (6 PUNKTE)

Geben Sie einen Teile-und-Herrsche-Algorithmus an, der (irgend)eine Triangulation einer Menge von n Punkten in der Ebene in Zeit $O(n \log n)$ berechnet. Sie dürfen dabei annehmen, dass sich die Punktmenge P in allgemeiner Lage befindet, d.h., es gibt keine zwei Punkte mit gleicher x-Koordinate und keine drei kollinearen Punkte in P. Zu Korrektheit und Laufzeitanalyse brauchen Sie ausnahmsweise nichts zu sagen.

Aufgabe 4 (4 PUNKTE)

Gegeben sei eine Menge P von n Punkte in der Ebene. Geben Sie einen Algorithmus an, der eine Gerade bestimmt, die maximal viele Punkte aus P enthält. Sie dürfen dabei auf alle aus der Vorlesung bekannten Algorithmen zurückgreifen, ohne diese nochmals im Detail beschreiben zu müssen. Welche Laufzeit erreicht ihr Algorithmus? (o. Beweis)

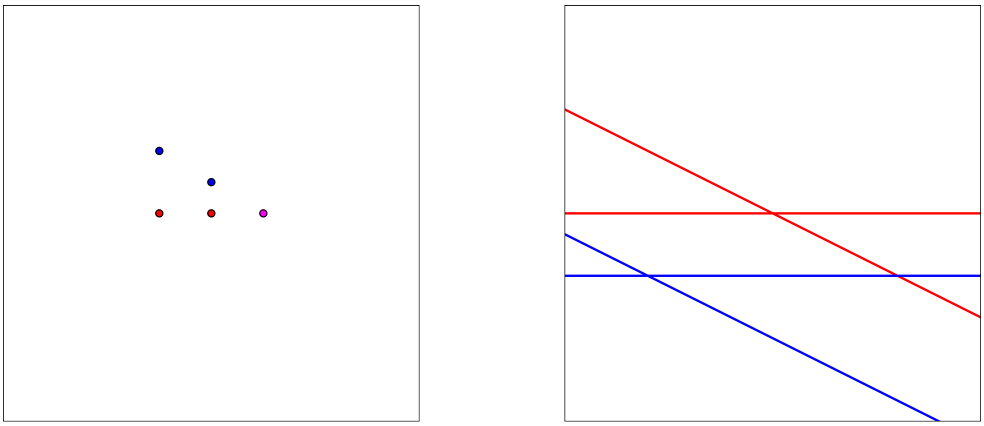
Aufgabe 5 (5 PUNKTE)
Bestimmen Sie die erwartete Laufzeit des folgenden rekursiven Algorithmus zur Bestimmung des Maximums unter der Voraussetzung, dass in Zeile 3 jedes der Elemente mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird. Begründen Sie ihre Antwort.

PARANOIDMAXIMUM(S)

```
1  if |S| = 1
2     then return einzige Element in S
3  x ← zufälliges Element aus S
4  x_m ← PARANOIDMAXIMUM(S − {x})
5  if (x ≤ x_m)
6     then return x_m
7     else  überprüfe zur Sicherheit nochmal für alle Elemente x' ∈ S, ob tatsächlich x' ≤ x gilt
8           return x
```

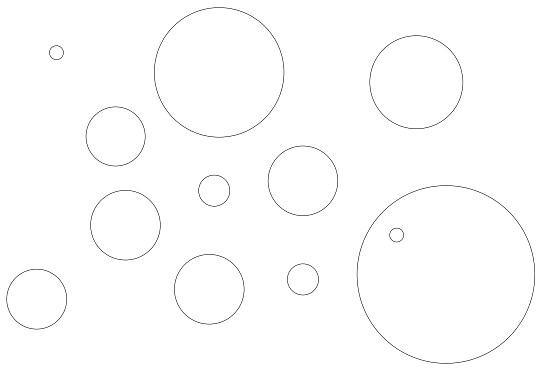
Aufgabe 6 (3 PUNKTE)
Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

$$p = (p_x, p_y) \quad \mapsto \quad \mathscr{D}(p) : Y = p_x \cdot X - p_y$$
$$\ell : Y = aX + b \quad \mapsto \quad \mathscr{D}(\ell) = (a, -b)$$



Die 4 Geraden in der rechten Abbildung sind unter $\mathscr{D}$ dual zu vier der fünf Punkte in der linken Abbildung. Die zum fünften Punkt duale Gerade fehlt jedoch. Zeichnen Sie die zum fünften Punkt duale Gerade in die rechte Abbildung ein.

Aufgabe 7 (9 PUNKTE)
Sei $\mathscr{K}$ eine Menge von n Kreisen in der Ebene. Die Kreise in $\mathscr{K}$ seien paarweise disjunkt, d.h., sie schneiden sich nicht und berühren sich auch nicht. Jeder Kreis ist durch seinen Mittelpunkt und seinen Radius gegeben.



Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der testet, ob es in $\mathscr{K}$ zwei verschiedene Kreise K und K' gibt, so dass K' in K enthalten ist. Bestimmen Sie die Laufzeit ihres Algorithmus.

Aufgabe 8 (10 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

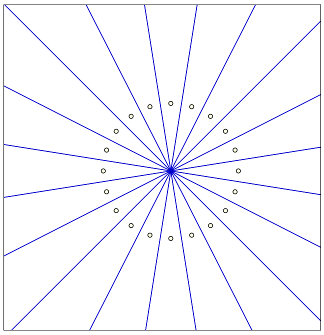
wahr falsch

◯ ◯ K_4, der vollständige Graph mit 4 Knoten, kann nicht kreuzungsfrei in die Ebene eingebettet werden.

◯ ◯ Für alle $n > 7$ Kreisscheiben gibt es Anordnungen von n Kreisen, bei denen $\Omega(n\sqrt{n})$ Schnittpunkte der zugehörigen Kreise auf dem Rand der Vereinigung der Kreisscheiben liegen.

◯ ◯ Wenn die n Punkte einer Punktmenge bereits nach x-Koordinate sortiert vorliegen, so kann man mit einem auf Plane-Sweep und Rotating-Calipers basierenden Algorithmus den Durchmesser der Punktmenge in Zeit $O(n)$ bestimmen.

◯ ◯ Für alle $n \geq 1$ gibt es eine Menge von $2n$ Punkten, für die Voronoidiagramm und Furthest-Point-Voronoidiagramm gleich aussehen, d.h., die Skelette der beiden Diagramme, also die Knoten und Kanten, bestehen aus den gleichen Punkten.



◯ ◯ Besteht die konvexe Hülle C einer Menge von n Punkten aus h Kanten, so kann man die Folge der Eckpunkte von C in Zeit $O(n \log h)$ berechnen.