Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

6. Februar 2020, 11:00 - 13:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	7
Gesamtpunktzahl:	50

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Aufgabe 1 (5 PUNKTE)
Bestimmen Sie die erwartete Laufzeit des folgenden rekursiven Algorithmus zur Bestimmung des Maximums unter der Voraussetzung, dass in Zeile 3 jedes der Elemente mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird. Begründen Sie ihre Antwort.

PARANOIDMAXIMUM(S)

1 **if** $|S| = 1$
2   **then return** einzige Element in S
3 $x \leftarrow$ zufälliges Element aus S
4 $x_m \leftarrow$ PARANOIDMAXIMUM$(S - \{x\})$
5 **if** $(x \leq x_m)$
6   **then return** x_m
7   **else** überprüfe zur Sicherheit nochmal für alle Elemente $x' \in S$, ob tatsächlich $x' \leq x$ gilt
8   **return** x

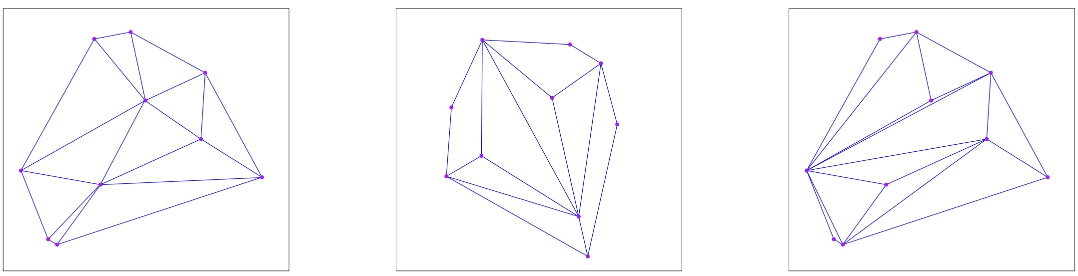
Aufgabe 2 (9 PUNKTE (4 + 3 + 2))

(a) Ein zusammenhängender eingebetteter planarer Graph mit n Knoten, e Kanten und f Flächen erfüllt die Euler-Formel $n - e + f = 2$. Beweisen Sie, dass ein (zusammenhängender) einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten maximal $3n - 6$ Kanten besitzt.

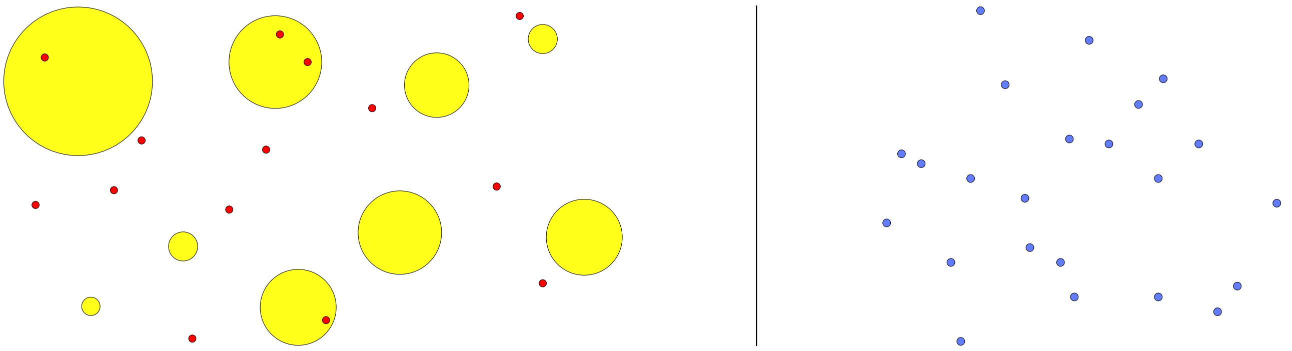
(b) Beweisen Sie, dass der vollständige Graph mit 5 Knoten (K_5) nicht kreuzungsfrei in die Ebene eingebettet werden kann.

(c) Der Grad eines Punktes p in einer Triangulation einer Punktmenge ist die Anzahl der Kanten, die in p enden. Beschreiben Sie die Konstruktion einer Punktmenge S mit $n \geq 3$ Punkten, so dass es in jeder(!) Triangulation von S einen Punkt vom Grad $n - 1$ gibt.

Aufgabe 3 (6 PUNKTE)
Bei welchen der folgenden Kantenmengen handelt es sich um die Delaunaytriangulation der Eckpunkte der Kanten. Begründen Sie negative Antworten.



Aufgabe 4 (9 PUNKTE)
Sei $\mathcal{S}$ eine Menge von n Punkten in der Ebene und $\mathcal{K}$ eine Menge von m paarweise disjunkten Kreisscheiben. Geben Sie einen möglichst effizienten Plane-Sweep Algorithmus an, der für jeden Punkt s in $\mathcal{S}$ bestimmt, ob s in einer der Kreisscheiben aus $\mathcal{K}$ enthalten ist. Bestimmen Sie die Laufzeit des Algorithmus.



Aufgabe 5 (9 PUNKTE)
Sei P eine Menge von n Punkten in der Ebene. Geben Sie einen Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der die maximalen Punkte in P aufsteigend nach x-Koordinate sortiert in Zeit $O(n \log n)$ berechnet. Zur Erinnerung: Ein Punkt $p \in P$ heißt maximal, falls $\{q \in P - \{p\} \mid q_x \geq p_x \text{ und } q_y \geq p_y\} = \emptyset$.
Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus. Ihr Algorithmus muss die geforderte Laufzeit erzielen, Sie müssen dies aber nicht nachweisen!

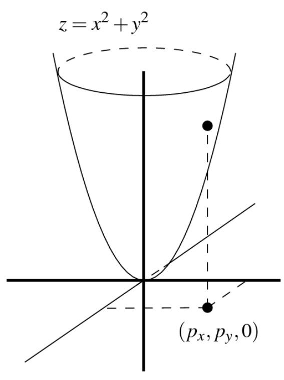
Aufgabe 6 (4 PUNKTE)

Sei $\mathscr{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$(x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2)$$

Sei P eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene und $\mathscr{L}(P)$ die Menge der Bildpunkte von P unter der Abbildung $\mathscr{L}$.

Clemens Clever behauptet, dass die konvexe Hülle $CH(\mathscr{L}(P))$ der Bildpunkte von P im $\mathbb{R}^3$ mindestens so viele Kanten enthält wie jede Triangulierung von P in der Ebene. Hat er recht? Begründen Sie ihre Antwort.



[Source: de Berg et al.]

Aufgabe 7 (8 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr	falsch	
○	○	Besteht die konvexe Hülle C einer Menge von n Punkten aus h Kanten, so kann man die Folge der Eckpunkte von C in Zeit $O(n \log h)$ berechnen.
○	○	Sei $\mathcal{A}$ ein Algorithmus, der die konvexe Hülle einer Menge von n Punkten in der Ebene in Zeit $T(n)$ im schlechtesten Fall löst. Dann gibt es einen Algorithmus, der eine beliebige Folge von n reellen Zahlen in Zeit $O(n + T(n))$ sortiert.
○	○	Für alle $n > 5$ gibt es Anordnungen von n Kreisscheiben, bei denen $2n$ Schnittpunkte der zugehörigen Kreise auf dem Rand der Vereinigung der Kreisscheiben liegen.
○	○	Sei L eine Menge von n nicht-vertikalen Geraden in der Ebene. Dann kann man den tiefsten Punkt auf der oberen Einhüllenden der Geraden in L mit Hilfe randomisiert inkrementeller Konstruktion in erwartet linearer Zeit $O(n)$ berechnen.