Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

21. Juli 2020, 12:00 - 14:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	8
Gesamtpunktzahl:	50

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

Aufgabe 1 (7 PUNKTE)

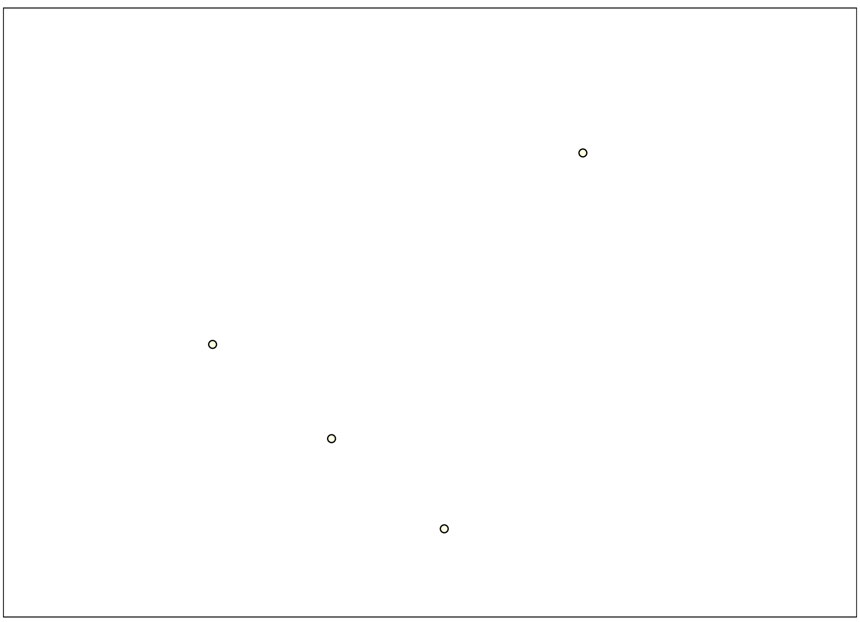
(a) Sei G ein zusammenhängender einfacher dreiecksfreier kreuzungsfrei eingebetteter planarer Graph mit n Knoten, $n \geq 4$. Dreiecksfrei bedeutet, dass es in der Einbettung von G kein Gebiet gibt, das von höchstens 3 Kanten begrenzt wird. Beweisen Sie mit Hilfe der Eulerformel $n - e + f = 2$, dass G höchstens $2n - 4$ Kanten besitzt.

(b) $K_{3,3}$ bezeichne wie in der Vorlesung den vollständigen bipartiten Graphen mit drei Knoten auf jeder Seite. Beweisen Sie, dass der $K_{3,3}$ nicht planar ist.

In central Spain in mainly rain
Three houses stood upon the plain.
The houses of our mystery
To which, from realms of industry
Flowed pipes and wires to light and heat
And other pipes with water sweet.
The owners said "What these things cross
Burn, leak or short, we'll suffer loss,
So let a graphman living near
Plan each from each to keep them clear."
Tell them, graphman, come in vain,
They'll bear one cross that must remain.
Explain the planeness of the plain.
- Blanche Descartes, Waterloo, 1997

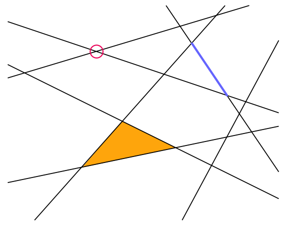
Aufgabe 2 (5 PUNKTE)

Skizzieren Sie das Voronoidiagramm der vier Punkte in der folgenden Abbildung innerhalb des umschließenden Rechtecks.



Aufgabe 3 (6 PUNKTE)

Sei L eine Menge von n Geraden in allgemeiner Lage in der Ebene. Ferner bezeichne $\mathcal{A}(L)$ das Arrangement der Geraden in L.



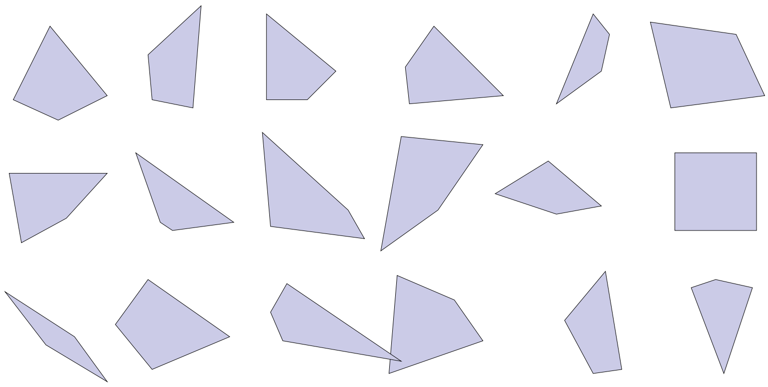
(a) Aus wie vielen Knoten besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(b) Aus wie vielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(c) Aus wie vielen Zellen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

Aufgabe 4 (9 PUNKTE)

Sei V eine Menge von n konvexen Vierecken in der Ebene. Sie dürfen annehmen, dass die Eckpunkte der Vierecke paarweise verschiedene x-Koordinaten haben. Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ testet, ob es in V ein Paar verschiedener Vierecke gibt, die nicht disjunkt sind, d.h., die einen Punkt, sei es auf dem Rand oder im Inneren, gemeinsam haben. Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit im schlechtesten Fall erreicht. Sie dürfen dabei annehmen, dass eine Funktion existiert, die in konstanter Zeit testet, ob zwei gegebene Vierecke disjunkt sind. Die Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie nicht nachzuweisen.



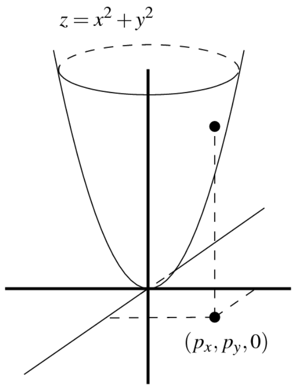
Aufgabe 5 (4 PUNKTE)

Sei $\mathscr{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$(x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2)$$

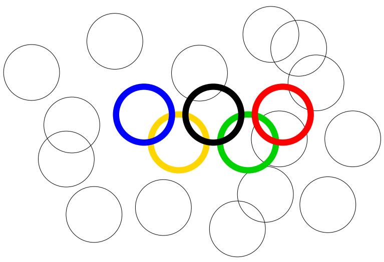
Sei P eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene und $\mathscr{L}(P)$ die Menge der Bildpunkte von P unter der Abbildung $\mathscr{L}$.

Clemens Clever behauptet, dass die konvexe Hülle $CH(\mathscr{L}(P))$ der Bildpunkte von P im $\mathbb{R}^3$ mindestens so viele Kanten enthält wie jede Triangulierung von P in der Ebene. Hat er recht? Begründen Sie ihre Antwort.



[Source: de Berg et al.]

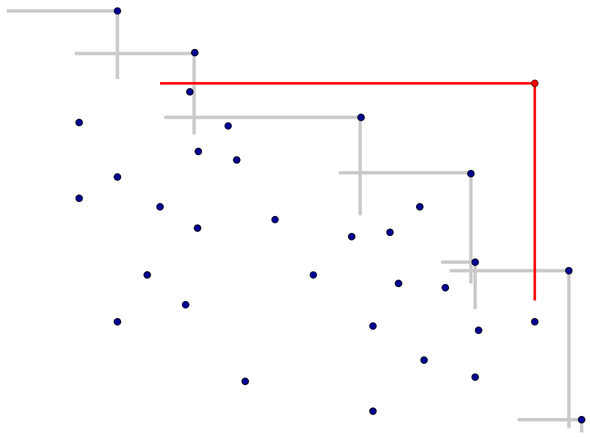
Aufgabe 6 (4 PUNKTE)



Sei S eine Menge von n Kreisen in der Ebene. Genau fünf davon bilden die olympischen Ringe. Die Kreise werden in zufälliger Reihenfolge gezeichnet, wobei jede Reihenfolge gleichwahrscheinlich ist.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle olympischen Ringe erst nach Zeichnen des letzten Kreises zum ersten Mal zu sehen sind? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 7 (9 PUNKTE)
Geben Sie einen effizienten inkrementellen Algorithmus an, der die maximalen Punkte einer Punktmenge S mit n Punkten in $\mathbb{R}^2$ in Zeit $O(n \log n)$ bestimmt. Analysieren Sie die Laufzeit ihres Algorithmus. Die Korrektheit brauchen Sie nicht nachzuweisen. (Falls Ihnen kein inkrementeller Algorithmus einfällt, können Sie für weniger Punkte alternativ auch einen Teile-und-Herrsche Algorithmus angeben.)

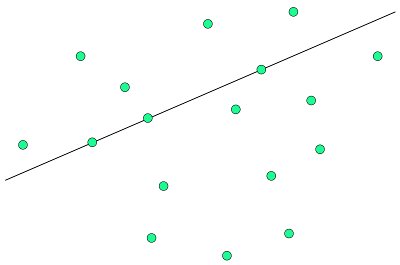


Aufgabe 8 (6 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr falsch

◯ ◯ Für alle $n \geq 10$ gibt es eine Konfiguration von n Punkten in der Ebene, deren Delaunaytriangulation einen Punkt mit $n-1$ inzidenten Kanten enthält.

◯ ◯ Es gibt einen Algorithmus, der für eine gegebene Menge P von n Punkten in Zeit $O(n^2)$ entscheidet, ob P drei kollineare Punkte enthält, also drei Punkte, die auf einer Geraden liegen.



◯ ◯ Wenn die n Punkte einer Punktmenge bereits nach x-Koordinate sortiert vorliegen, so kann man mit einem auf Rotating-Calipers basierenden Algorithmus ein flächenkleinstes, die Punkte einschließendes Rechteck in linearer Zeit finden.