Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

11. Februar 2021, 10:00 - 12:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

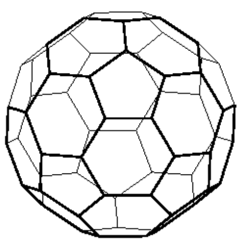
Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	7
Gesamtpunktzahl:	50

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7

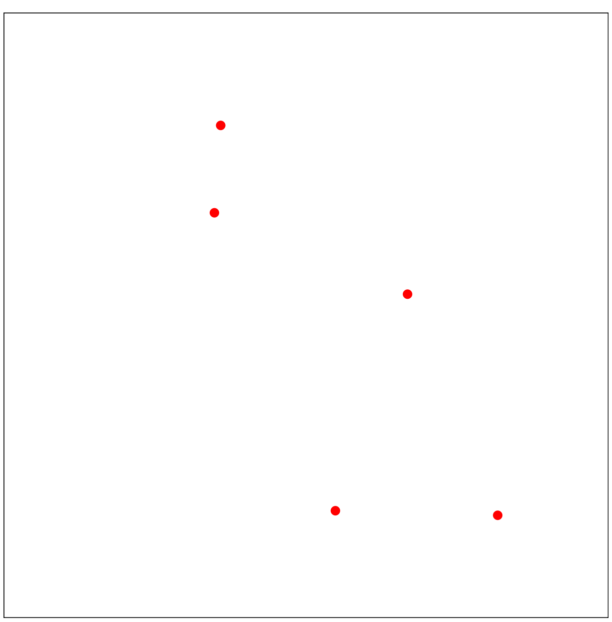
Aufgabe 1 (5 Punkte)

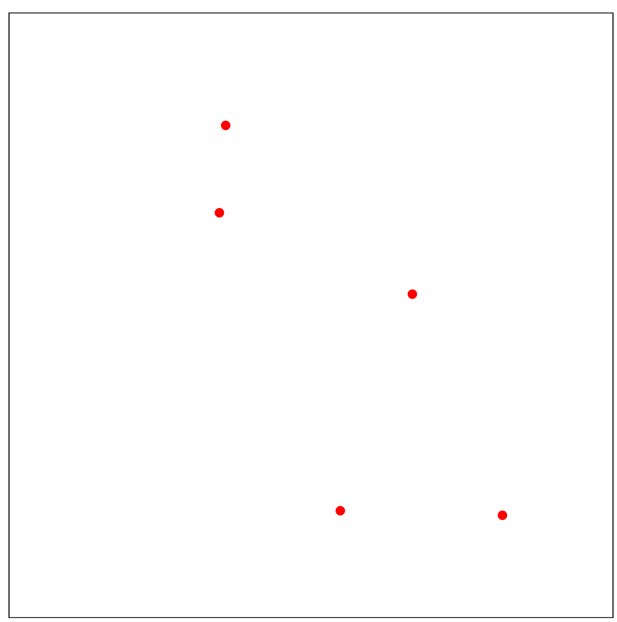


Sei G ein zusammenhängender einfacher vierecksfreier kreuzungsfrei eingebetteter planarer Graph mit n Knoten, $n \geq 5$, in dem jeder Knoten Grad mindestens 2 hat, also mindestens zwei inzidente Kanten besitzt. Vierecksfrei bedeutet, dass es in der Einbettung von G kein Gebiet gibt, das von höchstens 4 Kanten begrenzt wird, d.h., jedes Gebiet wird, wie bei dem links abgebildeten Fußballpolyeder, von fünf oder mehr Kanten begrenzt. Beweisen Sie mit Hilfe der Eulerformel $n - e + f = 2$, dass G höchstens $\frac{5}{3}n - \frac{10}{3}$ Kanten besitzt.

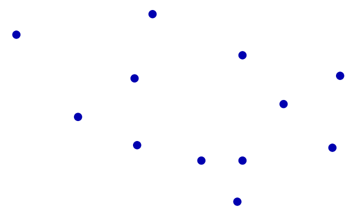
Aufgabe 2 (9 Punkte)

Zeichnen Sie in die linke Abbildung (ausschnittsweise) das Voronoidiagramm der Punktmenge skizzenhaft ein und in die rechte Abbildung das Delaunaydiagramm der Punktmenge.





Aufgabe 3 (6 PUNKTE)
Geben Sie einen effizienten Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der die minimalen Punkte einer Punktmenge S mit n Punkten in $\mathbb{R}^2$ in Zeit $O(n \log n)$ bestimmt. Ihr Algorithmus muss korrekt sein und die geforderte Laufzeitschranke erreichen, Sie müssen aber weder die Korrektheit noch die Laufzeit nachweisen.



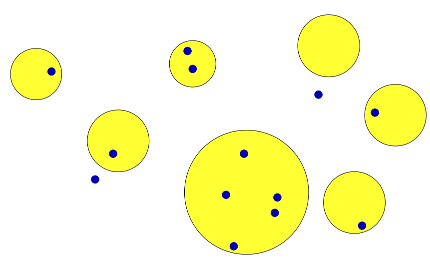
Aufgabe 4 (9 PUNKTE)
Bestimmen Sie jeweils die Komplexität des Arrangements $\mathcal{A}(L)$, genauer gesagt, die Anzahl der Knoten, Flächen und Kanten (Strecken und Strahlen zusammen) in Abhängigkeit von $n = |L|$:

(a) Alle n Geraden in L schneiden sich in einem Punkt.

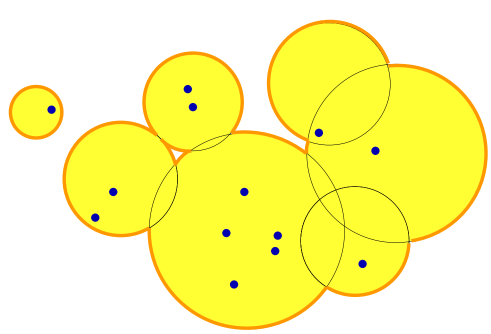
(b) Es gibt keine parallelen Geraden in L und alle bis auf eine schneiden sich in einem Punkt.

Aufgabe 5 (12 PUNKTE)

(a) Sei P eine Menge von Punkten in der Ebene und sei D eine Menge paarweise disjunkter Kreisscheiben. Geben Sie einen Algorithmus an, der testet, ob die Kreisscheiben die Punkte überdecken, d.h., ob alle Punkte in einer Kreisscheibe enthalten sind. Ihr Algorithmus sollte Laufzeit $O((n + m) \log(n + m))$ erreichen, wobei $n = |P|$ und $m = |D|$. Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit im schlechtesten Fall erreicht. Die Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie nicht nachzuweisen.



(b) Sei nun P eine Menge von Punkten in der Ebene und sei D eine Menge nicht notwendigerweise disjunkter Kreisscheiben. Die Kreisscheiben dürfen sich also überlappen. Gibt es auch dann einen Algorithmus, der in Zeit $O((n + m) \log(n + m))$ testet, ob die Kreisscheiben die Punkte überdecken? Begründen Sie ihre Antwort. Bedenken Sie, dass es $\Omega(m^2)$ Schnittpunkte der die Kreisscheiben begrenzenden Kreise geben kann.



Aufgabe 6 (5 PUNKTE)
Bestimmen Sie die erwartete Laufzeit des folgenden rekursiven Algorithmus zur Bestimmung des Maximums von n Elementen unter der Voraussetzung, dass in Zeile 3 jedes der Elemente mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird. Begründen Sie ihre Antwort.

PARANOIDMAXIMUM(S)
1 **if** $|S| = 1$
2   **then return** einzige Element in S
3 $x \leftarrow$ zufälliges Element aus S
4 $x_m \leftarrow$ PARANOIDMAXIMUM($S - \{x\}$)
5 **if** $(x \leq x_m)$
6   **then return** x_m
7   **else** überprüfe zur Sicherheit nochmal für alle Elemente $x' \in S$, ob tatsächlich $x' \leq x$ gilt
8   **return** x

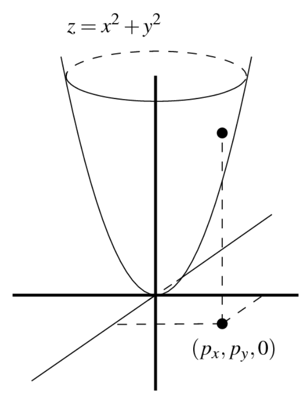
Aufgabe 7 (4 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr falsch

◯ ◯ Die konvexe Hülle $CH(\mathscr{L}(P))$ der Bildpunkte im $\mathbb{R}^3$ einer Menge P von n Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene unter der Abbildung $\mathscr{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$(x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2)$$

enthält mindestens so viele Kanten wie jede Triangulierung von P in der Ebene.



[Source: de Berg et al.]

◯ ◯ Für jedes $n \geq 2$ gibt es eine Menge von n Kreisscheiben in allgemeiner Lage, so dass mindestens $\frac{1}{8}n^2$ Schnittpunkte der Kreise auf dem Rand der Vereinigung der Kreisscheiben liegen.