Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

20. Juli 2021, 11:00 - 13:00 Uhr

Name, Vorname: ____________________________

Matrikelnummer: ____________________________

Anzahl Doppelbögen: ____________________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	7
Gesamtpunktzahl:	50

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

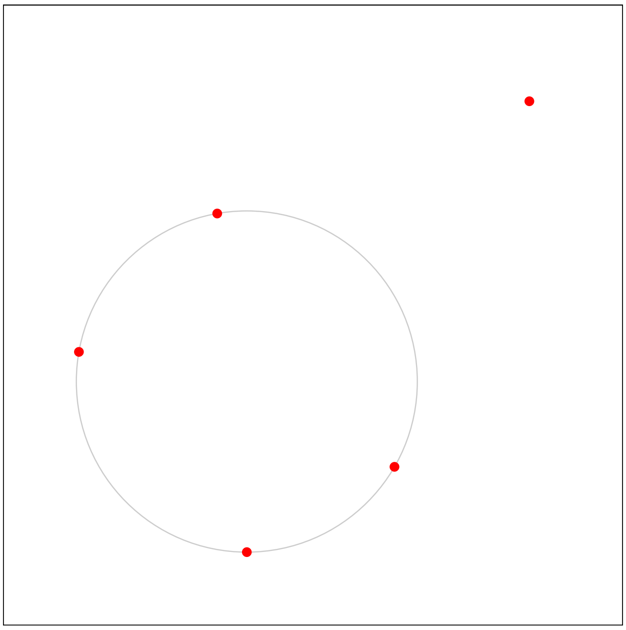
Aufgabe 1 (8 PUNKTE)

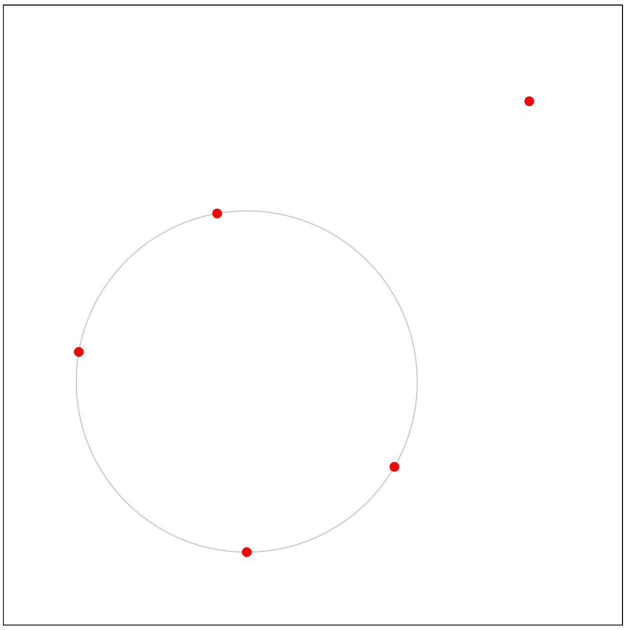
(a) Ein zusammenhängender eingebetteter planarer Graph mit n Knoten, e Kanten und f Flächen erfüllt die Euler-Formel $n - e + f = 2$. Beweisen Sie, dass ein (zusammenhängender) einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten maximal $3n - 6$ Kanten besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass es in jedem Voronoidiagramm von $n \geq 3$ Orten einen Ort gibt, dessen Voronoiregion von weniger als 6 Kanten begrenzt wird.

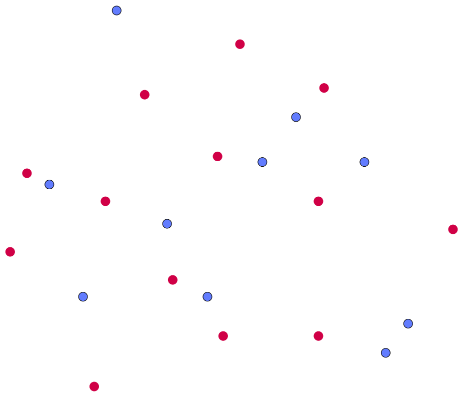
Aufgabe 2 (8 PUNKTE)

Zeichnen Sie in die linke Abbildung (ausschnittsweise) das Voronoidiagramm der 5 Punkte skizzenhaft ein und in die rechte Abbildung das Delaunaydiagramm der Punkte. Die vier Punkte links unten liegen auf einem Kreis.

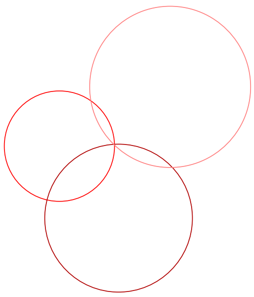


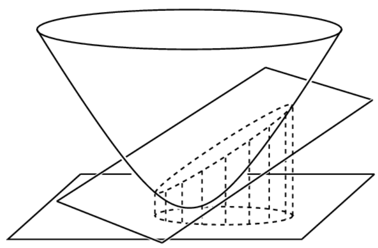


Aufgabe 3 (6 PUNKTE)
Gegeben seien zwei Punktmengen R and B in der Ebene in allgemeiner Lage. Punkte aus R nennen wir *rot*, Punkte aus B *blau*. Ein Punkt q liegt *nordöstlich* von p, falls $p_x \leq q_x$ und $p_y \leq q_y$ gilt. Sei n die Gesamtanzahl der Punkte. Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ alle blauen Punkte bestimmt, für die es höchstens einen roten Punkt gibt, der nordöstlich des blauen Punktes liegt (nordöstlich gelegene blaue Punkte sind nicht relevant). Ihr Algorithmus muss korrekt sein und die geforderte Laufzeitschranke erreichen, Sie müssen aber weder die Korrektheit noch die Laufzeit nachweisen.

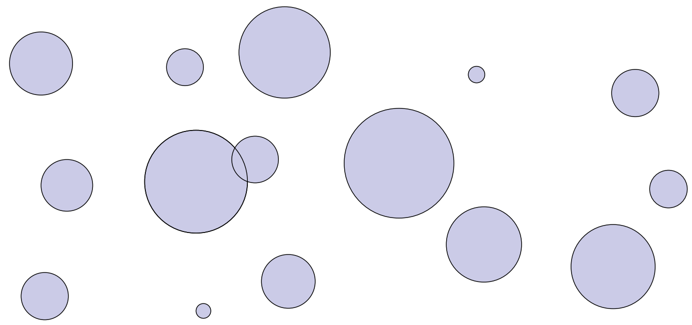


Aufgabe 4 (4 PUNKTE)
Gegeben seien drei Kreise $C_1 = (p_1, r_1), C_2 = (p_2, r_2), C_3 = (p_3, r_3)$ mit Zentren p_i und Radien r_i, $i = 1, 2, 3$ in der xy-Ebene des $\mathbb{R}^3$. Die Zentren der Kreise seien nicht kollinear. Sei h_i die Ebene, deren Schnitt mit dem Paraboloid $Z = X^2 + Y^2$ projeziert auf die xy-Ebene den Kreis C_i ergibt. Sei $s = h_1 \cap h_2 \cap h_3$. Liegt s unter, über oder auf dem Paraboloid $Z = X^2 + Y^2$, wenn sich die drei Kreise wie in der linken Abbildung in genau einem Punkt q schneiden? Begründen Sie ihre Antwort.

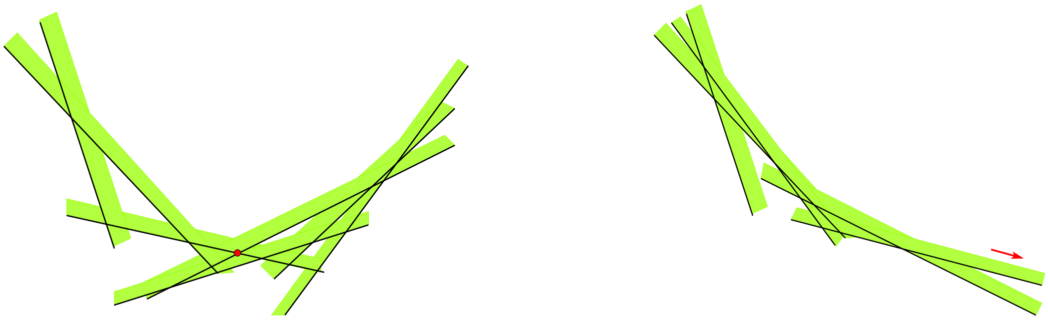




Aufgabe 5 (9 PUNKTE)
Sei $\mathscr{K}$ eine Menge von n Kreisscheiben in der Ebene. Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ testet, ob es in $\mathscr{K}$ ein Paar verschiedener Kreisscheiben gibt, die nicht disjunkt sind, d.h., die einen Punkt, sei es auf dem Rand oder im Inneren, gemeinsam haben. Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit im schlechtesten Fall erreicht. Die Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie nicht nachzuweisen.



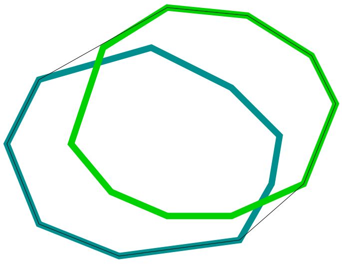
Aufgabe 6 (9 PUNKTE)
Sei L eine Menge nichtvertikaler Geraden in der Ebene. Gesucht ist der tiefstgelegene Punkt, der auf oder oberhalb aller Geraden in L liegt. Oder anders gesagt, wir minimieren Y unter Nebenbedingungen $Y \geq A_i X + B_i$, $i = 1, \ldots, n$. Geben Sie einen auf randomisierter inkrementeller Konstruktion basierenden Algorithmus an, der den gesuchten tiefstgelegenen Punkt in erwarteter Zeit $O(n)$ bestimmt. Weisen Sie nach, dass ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Die Korrektheit ihres Algorithmus brauchen Sie nicht nachzuweisen.



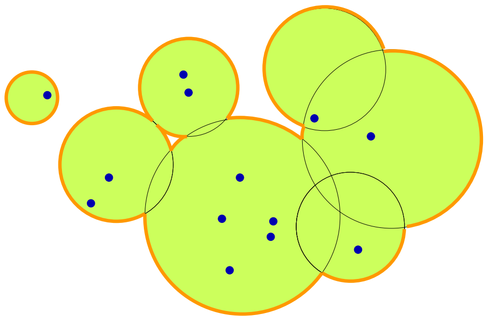
Aufgabe 7 (6 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr falsch

○ ○ Der Durchmesser der Vereinigung der Eckpunktmengen zweier durch die Folge ihrer Eckpunkte im Gegenuhrzeigersinn gegebener konvexer Polygone kann in linearer Zeit bestimmt werden.



○ ○ Sei P eine Menge von n Punkten in der Ebene und sei D eine Menge nicht notwendigerweise disjunkter Kreisscheiben. Die Kreisscheiben dürfen sich also überlappen. Sei $m = |D|$. Es gibt einen Algorithmus, der in Zeit $O((n+m)\log(n+m))$ testet, ob jeder der Punkte in mindestens einer der Kreisscheiben enthalten ist, obwohl es $\Omega(m^2)$ Schnittpunkte der die Kreisscheiben begrenzenden Kreise geben kann.



○ ○ Für alle $n \geq 5$ gibt es Anordnungen von n Kreisscheiben, bei der quadratisch viele Schnittpunkte der zugehrigen Kreise auf dem Rand der Vereinigung der Kreisscheiben liegen.