Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

3. Februar 2022, 12:00 - 14:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	7
Gesamtpunktzahl:	50

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7

Aufgabe 1 (11 PUNKTE)

Ein zusammenhängender eingebetteter planarer Graph mit n Knoten, e Kanten und f Flächen erfüllt die Euler-Formel $n - e + f = 2$. Sei nun G ein solcher zusammenhängender eingebetteter planarer Graph mit n Knoten.

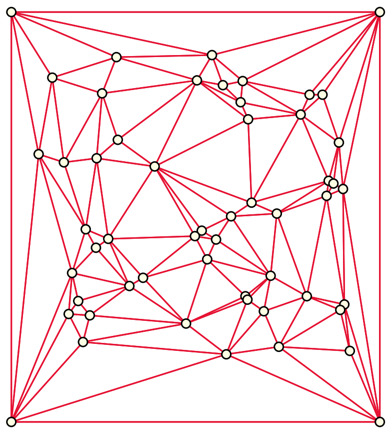
(a) Beweisen Sie, dass G maximal $3n - 6$ Kanten besitzt.

(b) Beweisen Sie, dass G maximal $2n - 4$ Flächen besitzt.

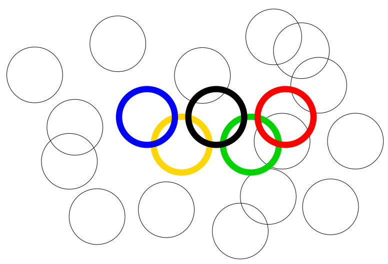
(c) In der nebenstehenden Abbildung ist die Delaunaytriangulierung der 4 Eckpunkte eines Rechtecks und 50 weiterer Punkte im Innern des Rechtecks zu sehen.

  (i) Aus wie vielen Kanten besteht die Delaunaytriangulierung? Begründen Sie Ihre Antwort.

  (ii) Aus wie vielen Dreiecken besteht die Delaunaytriangulierung? Begründen Sie Ihre Antwort.



Aufgabe 2 (4 PUNKTE)



Sei S eine Menge von n Kreisen in der Ebene. Genau fünf davon bilden die olympischen Ringe. Die Kreise werden in zufälliger Reihenfolge gezeichnet, wobei jede Reihenfolge gleichwahrscheinlich ist.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die olympischen Ringe erst nach Zeichnen des letzten Kreises zum ersten Mal zu sehen sind? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (6 PUNKTE)

Sei $\mathscr{D}$ die Dualitätsabbildung, die Punkte wie folgt auf nicht-vertikale Geraden abbildet und umgekehrt nicht-vertikale Geraden auf Punkte:

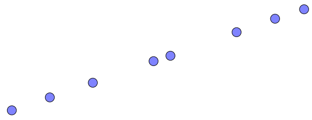
$$p = (p_x, p_y) \quad \mapsto \quad \mathscr{D}(p) : Y = p_x \cdot X - p_y$$
$$\ell : Y = aX + b \quad \mapsto \quad \mathscr{D}(\ell) = (a, -b)$$

Sei P eine Menge von k Punkten, die alle auf einer nicht-vertikalen Geraden liegen. Ferner sei $L = \{\mathscr{D}(p) \mid p \in P\}$ die Menge der zu den Punkten in P dualen Geraden und $\mathcal{A}(L)$ das Arrangement der Geraden in L.

(a) Aus wie vielen Knoten besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

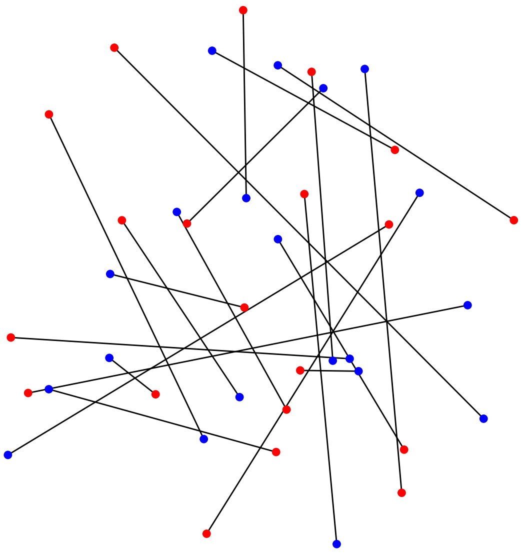
(b) Aus wie vielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(c) Aus wie vielen Zellen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)



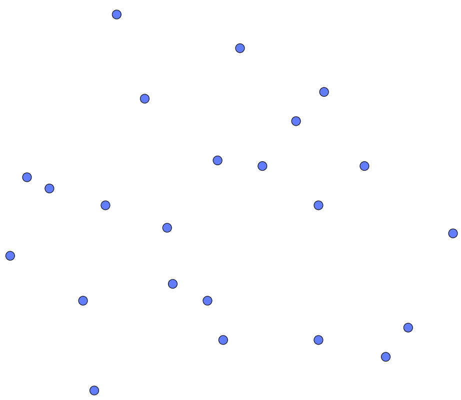
Aufgabe 4 (10 PUNKTE)

Sei S eine Menge von n Strecken in der Ebene. Geben Sie einen Algorithmus an, der die k Schnittpunkte der Strecken in Zeit $O((k+n)\log n)$ berechnet. Sie dürfen annehmen, dass sich die Strecken in „allgemeiner Lage“ befinden, d.h., alle Streckenendpunkte haben paarweise verschiedene x-Koordinaten und die Strecken paarweise vberschiedene Steigungen. Insbesondere gibt es auch keine vertikalen Strecken. Weisen Sie nach, dass Ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Die Korrektheit Ihres Algorithmus müssen Sie nicht nachweisen.

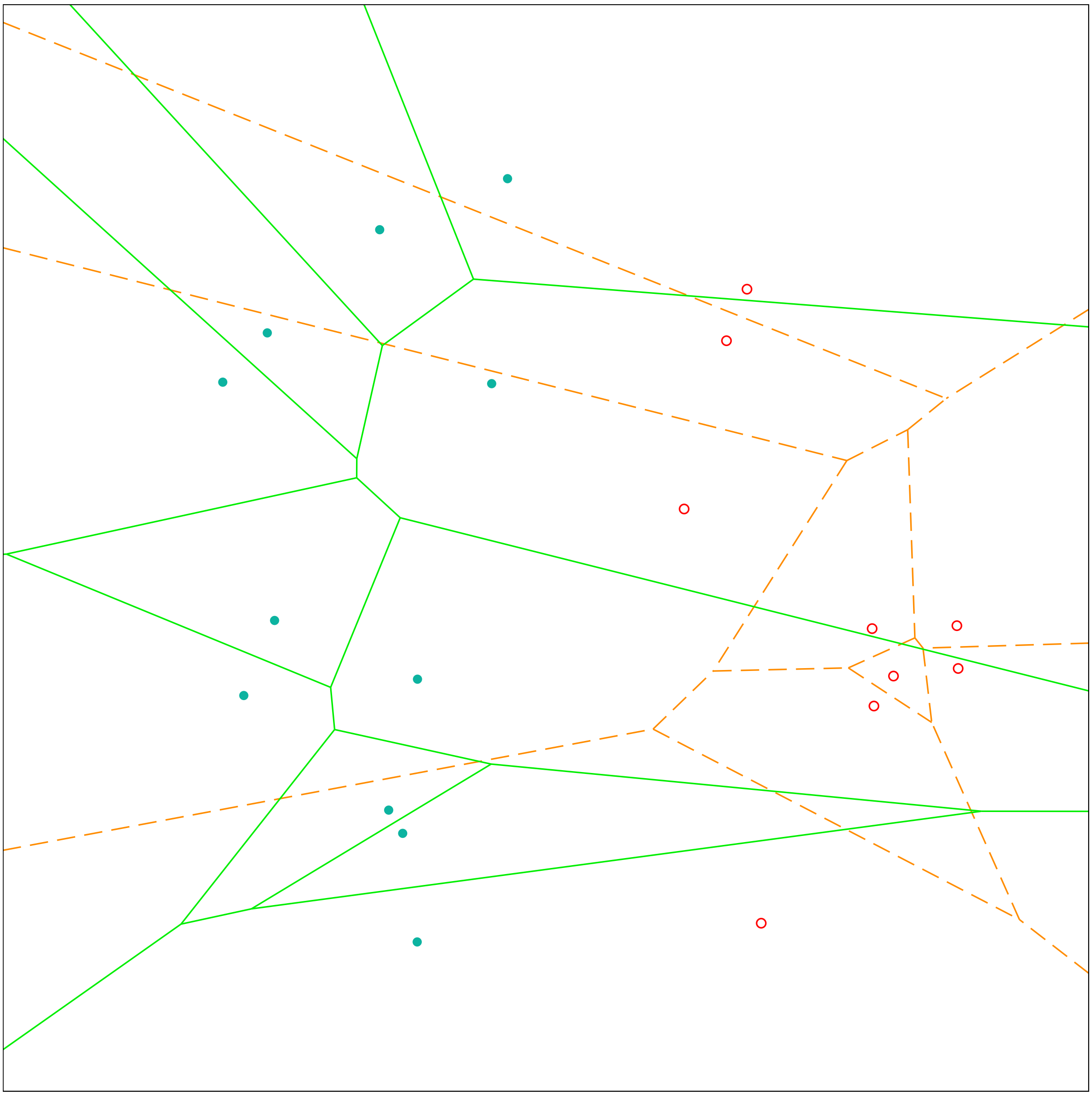


Aufgabe 5 (7 PUNKTE)

Sei P eine Menge von n Punkten in der Ebene. Geben Sie einen Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der die maximalen Punkte in P aufsteigend nach x-Koordinate sortiert in Zeit $O(n \log n)$ berechnet. Zur Erinnerung: Ein Punkt $p \in P$ heißt maximal, falls $\{q \in P - \{p\} \mid q_x \geq p_x \text{ und } q_y \geq p_y\} = \emptyset$. Ihr Algorithmus muss die geforderte Laufzeit erzielen, Sie müssen diese aber ebenso wie die Korrektheit nicht nachweisen!



Aufgabe 6 (8 PUNKTE)
In der folgenden Abbildung sind die Teile der Voronoidiagramme einer Punktmenge L und einer Punktmenge R (gestrichelt) innerhalb eines Quadrates dargestellt. Die Punkte in L liegen links der Vertikalen, die das Quadrat halbiert, die Punkte R rechts davon. Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf des Bisektors $\mathcal{B}(L, R)$!



Aufgabe 7 (4 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr	falsch	
◯	◯	Man kann in Zeit $O(n^2)$ testen, ob eine Menge von n Punkten in der Ebene 4 Punkte enthlt, die auf einer Geraden liegen.
◯	◯	Der Durchmesser der Vereinigung der Eckpunktmengen zweier durch die Folge ihrer Eckpunkte im Gegenuhrzeigersinn gegebener konvexer Polygone kann in linearer Zeit bestimmt werden.