Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

19. Juli 2022, 8:00 - 10:00 Uhr

Name, Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Anzahl Doppelbögen: ____________________

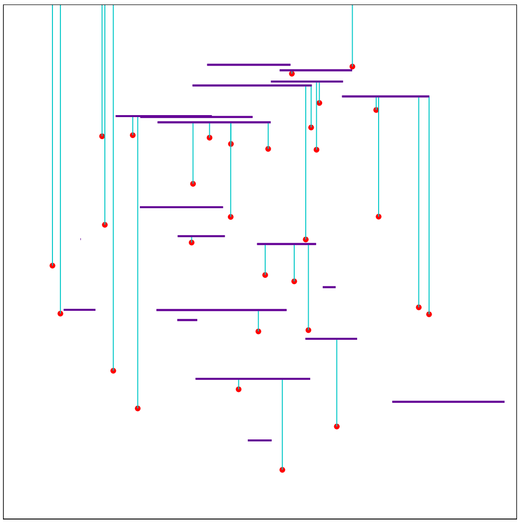
Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	7
Gesamtpunktzahl:	50

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7

Aufgabe 1 (11 PUNKTE)

Sei $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m\}$ eine Menge von m horizontalen Strecken und sei $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ eine Menge von k Punkten in der Ebene. Jede Strecke ℓ_i, $1 \leq i \leq m$, sei durch ihre zwei Endpunkte (a_i, h_i) und (b_i, h_i), $a_i < b_i$, gegeben. Sie dürfen annehmen, dass die Endpunkte der Strecken in $\mathcal{L}$ und die Punkte in $\mathcal{P}$ paarweise verschiedene x-Koordinaten haben und dass keine zwei Strecken die gleiche Höhe haben.

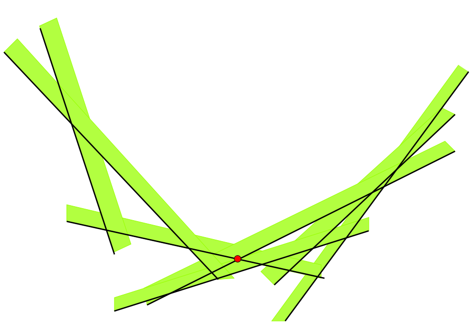


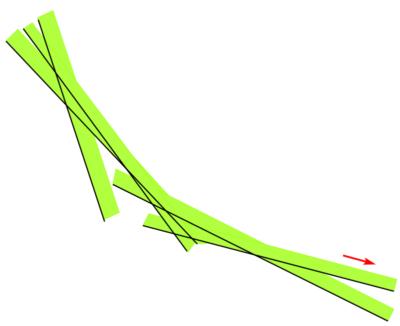
Geben Sie einen möglichst effizienten Plane-Sweep Algorithmus an, der für jeden Punkt p_i diejenige Strecke aus $\mathcal{L}$ bestimmt, die vertikal direkt oberhalb von p_i verläuft. Falls es keine solche Strecke gibt, soll ∞ ausgegeben werden.

Sei $n = k + m$. Bestimmen Sie eine möglichst gute obere Schranke für die Laufzeit des Algorithmus in Abhängigkeit von n. Begründen Sie die Korrektheit des Algorithmus.

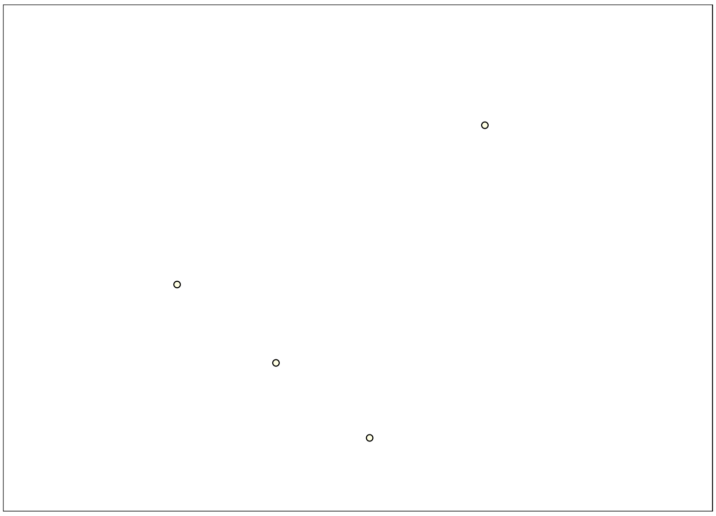
Aufgabe 2 (9 PUNKTE)

Sei L eine Menge nichtvertikaler Geraden in der Ebene. Gesucht ist der tiefstgelegene Punkt, der im Intervall $[a, b]$ auf oder oberhalb aller Geraden in L liegt. Oder anders gesagt, wir suchen einen Punkt (x, y) in der Ebene, für den $a \leq x \leq b$ und $y \geq A_i x + B_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt und y minimal ist unter allen solchen Punkten. Geben Sie einen auf Prune & Search basierenden Algorithmus an, der einen gesuchten tiefstgelegenen Punkt möglichst effizient ermittelt. Analysieren Sie Ihren Algorithmus. Die Korrektheit Ihres Algorithmus brauchen Sie nicht nachzuweisen. Sie dürfen annehmen, dass es einen Algorithmus LOWEST(L) gibt, der das Problem löst, falls $|L| \leq 32$ ist.





Aufgabe 3 (6 PUNKTE)
Skizzieren Sie das Voronoidiagramm der vier Punkte in der folgenden Abbildung innerhalb des umschließenden Rechtecks:



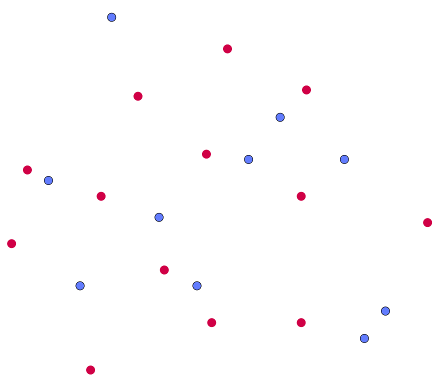
Aufgabe 4 (6 PUNKTE)
Wir betrachten die randomisiert-inkrementelle Konstruktion der Delaunaytriangulierung der Eckpunktmenge eines konvexen Polygons (in allgemeiner Lage):

CONVEXPOLYGONDT(S)

1 **if** $|S| \leq 3$
2   **then** ...
3 $q \leftarrow$ zufälliger Punkt in S mit Nachbarn p und r
4 $S' \leftarrow S - \{q\}$
5 $T \leftarrow$ CONVEXPOLYGONDT(S')
6 füge $\Delta(pqr)$ zu T hinzu
7 $B \leftarrow$ Menge schlechter Dreiecke in T
8 entferne alle Dreiecke in B aus T
9 retrianguliere das entstandene Gebiet durch Hinzufügen von Diagonalen zum Eckpunkt q

Sei n die Anzahl der Eckpunkte. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die Laufzeit der Zeilen 6-9 in $O(|B|)$ ist und die der Zeilen 1 und 2 in $O(1)$, die erwartete Laufzeit des Algorithmus asymptotisch. Zur Erinnerung: Die Delaunaytriangulierung besteht unter den gegebenen Bedingungen aus $2n - 3$ Kanten.

Aufgabe 5 (8 PUNKTE)



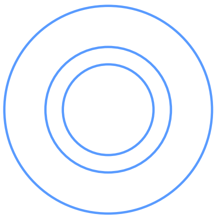
Gegeben seien zwei Punktmengen R und B in der Ebene in allgemeiner Lage. Punkte aus R nennen wir *rot*, Punkte aus B *blau*. Ein Punkt q liegt *nordöstlich* von p, falls $p_x \leq q_x$ und $p_y \leq q_y$ gilt. Geben Sie einen Teile-und-Herrsche Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ alle blauen Punkte bestimmt, für die es höchstens einen roten Punkt gibt, der nordöstlich des blauen Punktes liegt. Begründen Sie die Korrektheit des Algorithmus. Sie müssen nicht nachweisen, dass Ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht.

Aufgabe 6 (2 PUNKTE)
Wie lautet die Euler-Formel für einfache, zusammenhängende planare Graphen mit n Knoten, e Kanten und f Flächen?

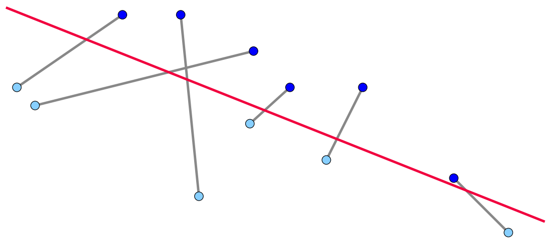
Aufgabe 7 (8 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr falsch

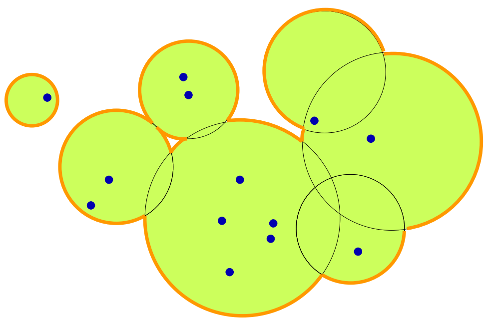
○ ○ Gegeben seien drei Kreise C_1, C_2 und C_3 in der $Z = 0$ Ebene im $\mathbb{R}^3$. Ferner sei h_i die Ebene, deren Schnitt mit dem Paraboloid $Z = X^2 + Y^2$ rückprojeziert auf die $Z = 0$ Ebene den Kreis C_i ergibt. Schließlich sei H_i^+ der Halbraum oberhalb von h_i einschließlich h_i und $H = \bigcap H_i^+$. Falls die drei Kreise konzentrisch sind, also den gleichen Mittelpunkt besitzen, so besteht der Rand von H aus drei Flächen, drei Strahlen und einem Punkt, wobei genau zwei der drei Strahlen zwei Schnittpunkte mit dem Paraboloid besitzten, der dritte keinen.



○ ○ Sei S eine Menge von n Strecken in der Ebene. Dann lässt sich in Zeit $O(n^2 \log n)$ entscheiden, ob es eine Gerade ℓ gibt, die alle Strecken in S schneidet.



○ ○ Sei P eine Menge von n Punkten in der Ebene und sei D eine Menge nicht notwendigerweise disjunkter Kreisscheiben. Die Kreisscheiben dürfen sich also überlappen. Sei $m = |D|$. Es gibt einen Algorithmus, der in Zeit $O((n + m) \log(n + m))$ testet, ob jeder der Punkte in mindestens einer der Kreisscheiben enthalten ist, obwohl es $\Omega(m^2)$ Schnittpunkte der die Kreisscheiben begrenzenden Kreise geben kann.



○ ○ Der Grad eines Punktes p in einer Triangulation einer Punktmenge ist die Anzahl der Kanten, die in p enden. In jeder Delaunaytriangulation einer Menge von mehr als 42 Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene gibt es einen Knoten vom Grad höchstens 5.