Schriftliche Prüfung im Fach

Grundzüge der Algorithmischen Geometrie

02. Februar 2023, 12:00 - 14:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________________

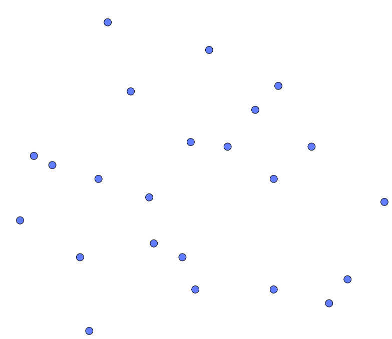
Bearbeitungszeit: 120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel: Keine!
Gesamtzahl Aufgaben: 7
Gesamtpunktzahl: 50

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

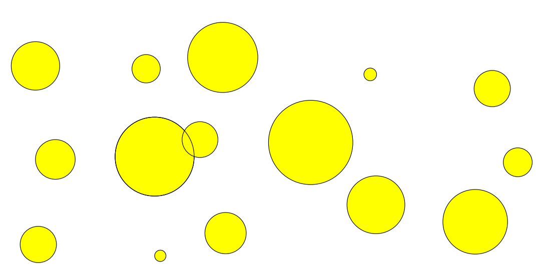
Aufgabe 1 (9 PUNKTE)

Gegeben sei eine Menge P von n Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage. Ein Punkt q liegt *nordöstlich* von einem Punkt p, falls $p_x \leq q_x$ und $p_y \leq q_y$ gilt. Die Punkte in P seien bereits xy-lexikographisch aufsteigend sortiert in einem Array $A[1 \dots n]$ gegeben. Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n)$ alle Punkte in P bestimmt, für die es höchstens einen anderen Punkt in P gibt, der nordöstlich des Punktes liegt. Zeigen Sie, dass Ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit erreicht. Falls es Ihnen nicht gelingen sollte, einen $O(n)$ Algorithmus für vorsortierte Punktmengen zu finden, so geben Sie einen $O(n \log n)$ Algorithmus an und weisen die geforderte Laufzeit nach. Die Korrektheit Ihres Algorithmus brauchen Sie nicht nachzuweisen.



Aufgabe 2 (9 PUNKTE)

Sei $\mathscr{K}$ eine Menge von n Kreisscheiben in der Ebene. Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n \log n)$ testet, ob es in $\mathscr{K}$ ein Paar verschiedener Kreisscheiben gibt, die nicht disjunkt sind, d.h., die einen Punkt, sei es auf dem Rand oder im Inneren, gemeinsam haben. Weisen Sie nach, dass Ihr Algorithmus die geforderte Laufzeit im schlechtesten Fall erreicht. Die Korrektheit Ihres Algorithmus brauchen Sie nicht nachzuweisen.



Aufgabe 3 (7 PUNKTE)

(a) Sei G ein zusammenhängender einfacher dreiecksfreier kreuzungsfrei eingebetteter planarer Graph mit n Knoten, $n \geq 4$. Dreiecksfrei bedeutet, dass es in der Einbettung von G kein Gebiet gibt, das von höchstens 3 Kanten begrenzt wird. Beweisen Sie mit Hilfe der Eulerformel $n - e + f = 2$, dass G höchstens $2n - 4$ Kanten besitzt.

(b) $K_{3,3}$ bezeichne wie in der Vorlesung den vollständigen bipartiten Graphen mit drei Knoten auf jeder Seite. Leiten Sie aus dem eben Gezeigten ab, dass der $K_{3,3}$ kein planarer Graph ist.

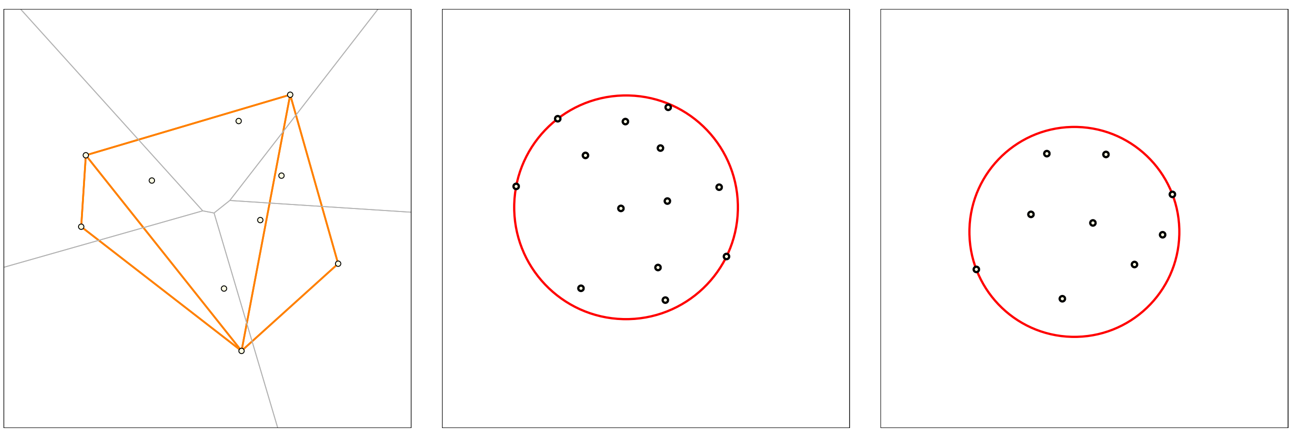
In central Spain in mainly rain
Three houses stood upon the plain.
The houses of our mystery
To which, from realms of industry
Flowed pipes and wires to light and heat
And other pipes with water sweet.
The owners said "What these things cross
Burn, leak or short, we'll suffer loss,
So let a graphman living near
Plan each from each to keep them clear."
Tell them, graphman, come in vain,
They'll bear one cross that must remain.
Explain the planeness of the plain.
- Blanche Descartes, Waterloo, 1997

Aufgabe 4 (8 PUNKTE)

Gesucht ist ein minimal großer Kreis, der eine Menge S von n Punkten in der Ebene enthält. Nehmen Sie an, Ihnen stünde ein Algorithmus FPDD(P) zur Verfügung, der in $O(n \log n)$ Zeit das Furthest Point Delaunaydiagramm einer Menge P von n Punkten bestimmt.

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der darauf aufbauend einen kleinsten einschließenden Kreis einer Punktmenge berechnet. Die Gesamtlaufzeit sollte in $O(n \log n)$ sein.

Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus!



Aufgabe 5 (5 PUNKTE)

Bestimmen Sie die erwartete Laufzeit des folgenden rekursiven Algorithmus zur Bestimmung des Maximums unter der Voraussetzung, dass in Zeile 3 jedes der Elemente mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird. Begründen Sie Ihre Antwort.

PARANOIDMAXIMUM(S)

1 **if** $|S| = 1$
2   **then return** einzige Element in S
3 $x \leftarrow$ zufälliges Element aus S
4 $x_m \leftarrow$ PARANOIDMAXIMUM$(S - \{x\})$
5 **if** $(x \leq x_m)$
6   **then return** x_m
7   **else** überprüfe zur Sicherheit nochmal für alle Elemente $x' \in S$, ob tatsächlich $x' \leq x$ gilt
8   **return** x

Aufgabe 6 (6 PUNKTE)
Sei L eine Menge von n Geraden in allgemeiner Lage in der Ebene.

(a) Aus wievielen Knoten besteht das Arrangement $\mathcal{A}(L)$ der Geraden? (ohne Beweis)

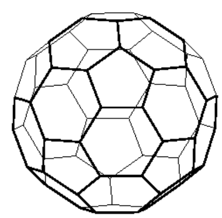
(b) Aus wievielen Strecken und Strahlen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

(c) Aus wievielen Zellen besteht $\mathcal{A}(L)$? (ohne Beweis)

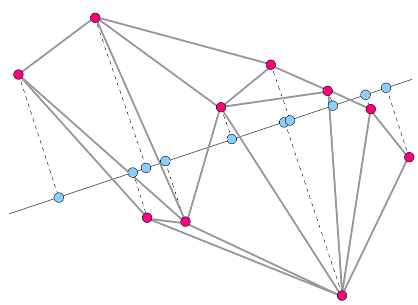
Aufgabe 7 (6 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
2 Punkte für jede richtige Antwort, 1 Punkt Abzug für jede falsche.

wahr falsch

○ ○ Es gibt eine Menge P von $n \geq 14$ Punkten im $\mathbb{R}^3$ in allgemeiner Lage, deren konvexe Hülle $CH(P)$ ausschließlich von Seitenflächen begrenzt wird, die von genau sechs Kanten begrenzt werden.



○ ○ Eine Triangulation einer Menge von Punkten, die sortiert nach der Folge der paarweise verschiedenen Projektionspunkte entlang einer uns bekannten nicht-vertikalen Geraden ℓ gegeben sind, kann mit Hilfe eines Teile-und-Herrsche Algorithmus in Zeit $O(n)$ bestimmt werden.



○ ○ Unter der Dualitätsabbildung $\mathscr{D}$ mit $p = (p_x, p_y) \mapsto \mathscr{D}(p) : Y = p_x \cdot X - p_y$ und $\ell : Y = aX + b \mapsto \mathscr{D}(\ell) = (a, -b)$ sind die links abgebildeten Punkte und Geraden dual zu den rechts abgebildeten Geraden und Punkten.