Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

09. Februar 2010, 11:00 - 13:30 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	10
Gesamtpunktzahl:	63

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Aufgabe 1 (7 PUNKTE)

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph. Ein aufspannender Baum von G ist ein Teilgraph G' von G, $G' = (V, E')$, $E' \subseteq E$, der einen Baum bildet, der alle Knoten in V verbindet. Ein *Hamilton-Pfad* in G ist ein einfacher Pfad, bei dem jeder Knoten genau einmal besucht wird. Die Sprache HAMILTON-PFAD $= \{\langle G\rangle \mid$ G ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen Hamilton-Pfad besitzt$\}$ ist NP-vollständig. Zeigen Sie, dass ISOMORPHIC-SPANNING-TREE $= \{\langle G, T\rangle \mid T$ ist ein Baum und G ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen aufspannenden Baum besitzt, der zu T isomorph ist$\}$ eine NP-vollständige Sprache ist.

Aufgabe 2 (5 PUNKTE)

Sei $\mathscr{P}$ ein Minimierungsproblem in NPO. Nehmen Sie an, es gibt eine Konstante c, so dass die Sprache

$$\{\langle x\rangle \mid x \text{ ist eine Probleminstanz von } \mathscr{P} \text{ mit } m^*(x) \leq c\}$$

eine NP-vollständige Sprache ist. Zeigen Sie, dass es dann für $r < \frac{c+1}{c}$ keinen r-approximierenden Algorithmus für $\mathscr{P}$ mit polynomieller Laufzeit gibt, es sei denn P $=$ NP.

Aufgabe 3 (6 PUNKTE)

Die Leonardo-Zahlen sind durch die Funktion $L : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ wie folgt definiert:

$$L(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ L(n-1) + L(n-2) + 1 & n \geq 2 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass L eine **loop**-berechenbare Funktion ist.

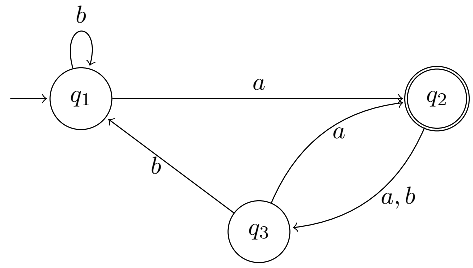
Aufgabe 4 (6 PUNKTE)

Sei $\mathsf{geh} : \mathbb{N}_0^{k+1} \to \mathbb{N}_0$ eine primitiv rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathsf{eff} : \mathbb{N}_0^{k+1} \to \mathbb{N}_0$ eine primitiv rekursive Funktion ist, wobei

$$\mathsf{eff}(n_1, \dots, n_k, n_{k+1}) = \sum_{i=0}^{n_{k+1}} \mathsf{geh}(n_1, \dots, n_k, i)$$

Aufgabe 5 (5 PUNKTE)
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Zeigen Sie, dass
$$L^* = L^*L^*$$

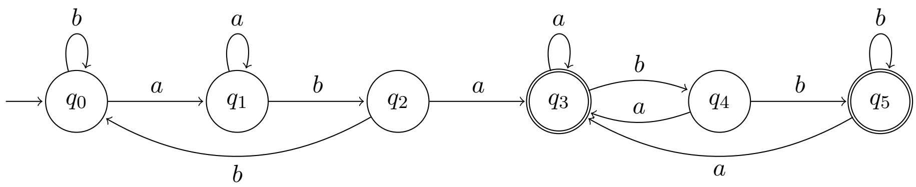
Aufgabe 6 (6 PUNKTE)
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und sei $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ der durch das folgendes Diagramm gegebene deterministische endliche Automat:



Für $q \in Q$ sei wie in der Vorlesung $X_q = \{w \in \Sigma^* \mid (q, w) \vdash_M^* (f, \varepsilon), f \in F\}$. Geben Sie das zu M gehörige Gleichungssystem für die X_q, $q \in Q$, über der zugehörigen Kleene Algebra bzgl. der Sprachen über Σ an.

Aufgabe 7 (6 PUNKTE)
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und sei $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält genau ein } a\}$. Geben Sie die Äquivalenzklassen der Relation $\approx_L$ an.

Aufgabe 8 (8 PUNKTE)
Geben Sie den Minimalautomaten an, der zu folgendem deterministischen endlichen Automaten äquivalent ist:



Aufgabe 9 (5 PUNKTE)
Zeigen Sie, dass die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ linear ist.

Aufgabe 10 (9 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch? (jeweils ohne Beweis)

(a) PSPACE = NPSPACE.
(b) Falls L eine reguläre Sprache ist, so ist $\mathrm{Pref}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in L, \text{so dass } x \text{ ein Präfix von } y \text{ ist}\}$ eine kontextfreie Sprache.
(c) Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen unter Komplementbildung.
(d) Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Homomorphismen.
(e) Jede **while**-berechenbare Funktion ist auch **loop**-berechenbar.
(f) Es gibt eine **while**-berechenbare Funktion, die nicht Turing-berechenbar ist.