Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

29. Juli 2011, 11:30 - 13:30 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

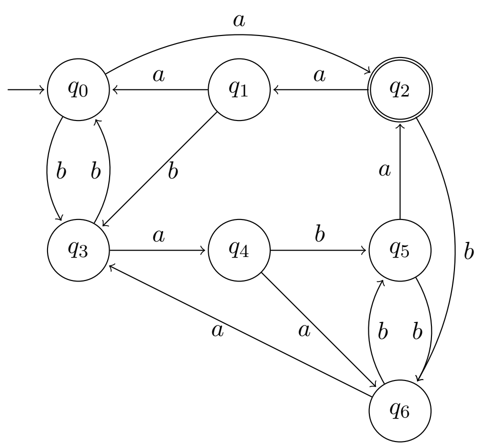
Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	10
Gesamtpunktzahl:	57

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Aufgabe 1 (8 PUNKTE)

Geben Sie den Minimalautomaten an, der zu folgendem deterministischen endlichen Automaten äquivalent ist:



Aufgabe 2 (9 PUNKTE (3+4+2))

Eine algebraische Struktur $(\mathbb{K}, +, \cdot, {}^\star, 0, 1)$ heißt Kleene Algebra, falls für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

$$
\begin{array}{rlrl}
a + (b + c) = (a + b) + c & (1) & a(b + c) = ab + ac & (8) \\
a + b = b + a & (2) & (a + b)c = ac + bc & (9) \\
a + a = a & (3) & 1 + aa^\star = a^\star & (10) \\
a + 0 = a & (4) & 1 + a^\star a = a^\star & (11) \\
a(bc) = (ab)c & (5) & b + ac \leq c \Rightarrow a^\star b \leq c & (12) \\
a1 = 1a = a & (6) & b + ca \leq c \Rightarrow ba^\star \leq c & (13) \\
a0 = 0a = 0 & (7) & \text{wobei } a \leq b \text{ g.d.w. } a + b = b. &
\end{array}
$$

Zeigen Sie, dass in jeder Kleene-Algebra für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

(a) Falls $a \leq c$ und $b \leq c$ gilt, so gilt auch $a + b \leq c$.

(b) $a = b$ genau dann wenn $a \leq b$ und $b \leq a$.

(c) $1 + a^\star = a^\star$

Aufgabe 3 (4 PUNKTE)

Sei $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Geben Sie eine reguläre Sprache L_{reg} an, so dass $\Psi(L_{\text{reg}}) = \Psi(L)$.

Aufgabe 4 (3 PUNKTE)
Sei $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Zeigen Sie, dass die Wörter aa und aba zu verschiedenen Äquivalenzklassen bzgl. $\approx_L$ gehören.

Aufgabe 5 (6 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
(1.5 Punkte für jede richtige Antwort, 0.5 Punkte Abzug für jede falsche.)

wahr	falsch	
◯	◯	Die Sprache $L = \{a^i bc^i \mid i \geq 1\}$ ist deterministisch kontextfrei.
◯	◯	Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigung.
◯	◯	$\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ist rekursiv aufzählbar.
◯	◯	P $\subseteq$ NPSPACE $\subseteq$ EXP.

Aufgabe 6 (5 PUNKTE)
Zeigen Sie, dass die Funktion $C : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit

$$C(n) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

primitiv rekursiv ist. Sie dürfen hierbei annehmen, dass die Funktionen $\mathsf{minus} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathsf{minus}(n_1, n_2) = \max(0, n_1 - n_2)$ und $\mathsf{nchoosek} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathsf{nchoosek}(n_1, n_2) = \binom{n_1}{n_2}$ bereits als primitiv rekursiv nachgewiesen sind. $C(n)$ ist die n-te Catalan-Zahl, die beispielsweise angibt, wie viele verschiedene (geordnete) binäre Bäume mit $n + 1$ Blättern existieren.

Aufgabe 7 (5 PUNKTE)
Seien $f : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ und $g_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sowie $g_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ jeweils **loop**-berechenbare Funktionen, die von den **loop**-Programmen Π_f, Π_{g_1} und Π_{g_2} berechnet werden. Geben Sie ein **loop**-Programm an, das die Funktion $h : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $h(n_1, n_2) = f(g(n_1), g(n_2))$ berechnet.

Aufgabe 8 (6 PUNKTE)
Geben Sie die Definition der Komplexitätsklassen APX und FPTAS an.

Aufgabe 9 (5 PUNKTE)
Beim NP-vollständigen Problem PARTITION sind $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ gegeben und es ist zu entscheiden, ob es $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt, so dass

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$$

Beim MINIMUM-BIN-PACKING Problem sind eine Korbgröße $B \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \leq B$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gegeben. Gesucht ist das minimale k, so dass es eine Partition von $\{1, \ldots, n\}$ in k Teilmengen $S_1, \ldots, S_k$ gibt mit

$$\sum_{i \in S_j} a_i \leq B \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, k$$

Zeigen Sie, dass es keinen Approximationsalgorithmus mit polynomieller Laufzeit für MINIMUM-BIN-PACKING gibt, der Approximationsgüte kleiner als $\frac{3}{2}$ erreicht, falls P $\neq$ NP.

Aufgabe 10 (6 PUNKTE)
Ein *Hamilton-Pfad* in einem einfachen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist ein einfacher Pfad, bei dem jeder Knoten genau einmal besucht wird. Die Sprache HAMILTON-PFAD $= \{\langle G \rangle \mid G$ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen Hamilton-Pfad besitzt$\}$ ist NP-vollständig. Zeigen Sie, dass MAXIMUM-LEAVES-SPANNING-TREE $= \{\langle G, k \rangle \mid G$ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen aufspannenden Baum mit höchstens k Blättern (= Knoten vom Grad 1) besitzt$\}$, ebenfalls NP-vollständig ist.