Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

9. Februar 2012, 9:00 - 11:00 Uhr

Name, Vorname: __________________________

Matrikelnummer: __________________________

Anzahl Doppelbögen: __________________________

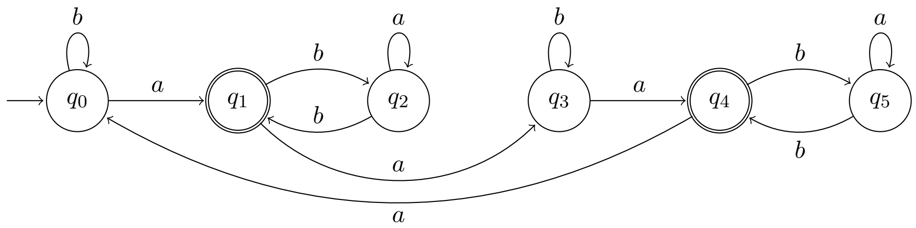
Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	10
Gesamtpunktzahl:	57

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Aufgabe 1 (8 PUNKTE)

Konstruieren Sie den Minimalautomaten, der zu folgendem deterministischen endlichen Automaten äquivalent ist:



Aufgabe 2 (5 PUNKTE)

Sei $\mathscr{P}$ ein Minimierungsproblem in NPO. Nehmen Sie an, es gibt eine Konstante c, so dass die Sprache

$$\{\langle x\rangle \mid x \text{ ist eine Probleminstanz von } \mathscr{P} \text{ mit } m^*(x) \leq c\}$$

eine NP-vollständige Sprache ist. Zeigen Sie, dass es dann für $r < \frac{c+1}{c}$ keinen r-approximierenden Algorithmus für $\mathscr{P}$ mit polynomieller Laufzeit gibt, es sei denn P $=$ NP.

Aufgabe 3 (4 PUNKTE)

Sei $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cup \{a^n c^n \mid n \geq 0\}$. Geben Sie eine reguläre Sprache L_{reg} an, so dass $\Psi(L_{\text{reg}}) = \Psi(L)$.

Aufgabe 4 (4 PUNKTE)

Sei $L = \mathcal{L}(ab^* \cup ba^*)$. Geben Sie die Äquivalenzklassen von $\{a, b\}^*$ bzgl. $\approx_L$ an.

Aufgabe 5 (5 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine **loop**-berechenbare Funktion ist:

$$f(n_1) = \begin{cases} 3 & n_1 \leq 3 \\ 4 & n_1 \geq 4 \end{cases}$$

Aufgabe 6 (8 PUNKTE)

Eine algebraische Struktur $(\mathbb{K}, +, \cdot, ^\star, 0, 1)$ heißt Kleene Algebra, falls für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad (1) \qquad a(b + c) = ab + ac \quad (8)$$
$$a + b = b + a \quad (2) \qquad (a + b)c = ac + bc \quad (9)$$
$$a + a = a \quad (3) \qquad 1 + aa^\star = a^\star \quad (10)$$
$$a + 0 = a \quad (4) \qquad 1 + a^\star a = a^\star \quad (11)$$
$$a(bc) = (ab)c \quad (5) \qquad b + ac \leq c \Rightarrow a^\star b \leq c \quad (12)$$
$$a1 = 1a = a \quad (6) \qquad b + ca \leq c \Rightarrow ba^\star \leq c \quad (13)$$
$$a0 = 0a = 0 \quad (7) \qquad \text{wobei } a \leq b \text{ g.d.w. } a + b = b.$$

Zeigen Sie, dass in jeder Kleene-Algebra für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

(a) $(1 + bb^\star)a^\star + c + (b^\star bc + b^\star a^\star) = b^\star(a^\star + c)$.

(b) $a^\star \leq a^\star a^\star$

Aufgabe 7 (3 PUNKTE)

Geben Sie die Definition der Komplexitätsklasse PTAS an.

Aufgabe 8 (5 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Funktion double : $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit

$$\mathsf{double}(n) = 2 \cdot n$$

primitiv rekursiv ist, ohne die Funktion mult zu benutzen. Benutzen Sie stattdessen Primitive Rekursion und die Funktion $\mathsf{plus2} = Ⓢ(\mathsf{succ}, \mathsf{succ})$ sowie die Basisfunktionen.

Aufgabe 9 (9 PUNKTE)

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?

(1.5 Punkte für jede richtige Antwort, 0.5 Punkte Abzug für jede falsche.)

wahr	falsch	
◯	◯	PSPACE = NPSPACE.
◯	◯	Die Sprache POSITIVE-3-SAT $= \{\langle\phi\rangle \mid \phi$ ist eine Boolesche Formel in konjunktiver Normalform, in der alle Klauseln aus genau 3 Literalen bestehen und in der keine Variable negiert vorkommt und für die es eine erfüllende Belegung der Variablen gibt$\}$ ist eine NP-vollständige Sprache.
◯	◯	Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Schnitt.
◯	◯	Jede **while**-berechenbare Funktion ist eine primitiv rekursive Funktion.
◯	◯	PO $\subseteq$ APX.
◯	◯	Es gibt ein Alphabet Σ und Sprachen $M, N \subseteq \Sigma^*$, so dass $(M^*N)^*M^* \neq (M \cup N)^*$.

Aufgabe 10 (6 PUNKTE)

Ein *Hamilton-Pfad* in einem einfachen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist ein einfacher Pfad, bei dem jeder Knoten genau einmal besucht wird. Sei HAMILTON-PFAD $= \{\langle G\rangle \mid G$ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen Hamilton-Pfad besitzt$\} \subseteq \Gamma^*$ und sei BOUNDED-DEGREE-SPANNING-TREE $= \{\langle G, k\rangle \mid G$ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen aufspannenden Baum besitzt, in dem jeder Knoten Grad höchstens k hat$\} \subseteq \Sigma^*$. Konkretisieren Sie die Kodierungen $\langle G\rangle$ und $\langle G, k\rangle$ geeignet und geben Sie dann eine in Polynomialzeit berechenbare Reduktionsfunktion $f : \Gamma^* \to \Sigma^*$ an, die belegt, dass

$$\text{HAMILTON-PFAD} \preceq_P \text{BOUNDED-DEGREE-SPANNING-TREE}$$

Zeigen Sie, dass f die Sprache HAMILTON-PFAD auf BOUNDED-DEGREE-SPANNING-TREE reduziert. Sie brauchen nicht zu zeigen, dass f in Polynomialzeit berechenbar ist.