Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

1. August 2013, 10:15 - 12:15 Uhr

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________________

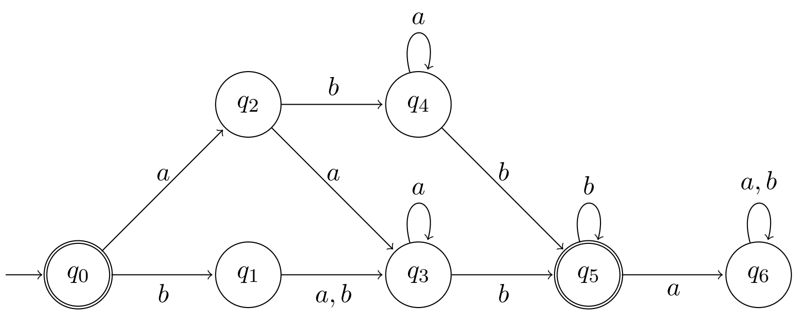
Bearbeitungszeit: 120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel: Keine!
Gesamtzahl Aufgaben: 10
Gesamtpunktzahl: 67

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Aufgabe 1 (12 PUNKTE (8+4))

(a) Konstruieren Sie den Minimalautomaten, der zu folgendem deterministischen endlichen Automaten M äquivalent ist:



(b) Sei $L = L(M)$. Geben Sie die Äquivalenzklassen von $\{a, b\}^*$ bzgl. $\approx_L$ an.

Aufgabe 2 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $f : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ eine **loop**-berechenbare Funktion ist, indem Sie ein **loop**-Programm angeben, das f berechnet:

$$f(n_1, n_2) = \begin{cases} n_2 & n_1 \leq 2 \\ n_1 + n_2 & n_1 \geq 3 \end{cases}$$

Aufgabe 3 (5 PUNKTE)

Beim NP-vollständigen Problem PARTITION sind $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ gegeben und es ist zu entscheiden, ob es $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt, so dass

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$$

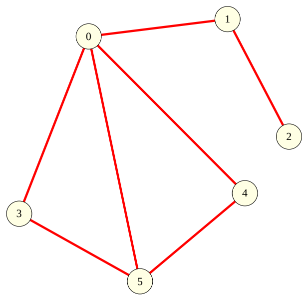
Beim MINIMUM-BIN-PACKING Problem sind eine Korbgröße $B \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \leq B$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gegeben. Gesucht ist das minimale k, so dass es eine Partition von $\{1, \ldots, n\}$ in k Teilmengen $S_1, \ldots, S_k$ gibt mit

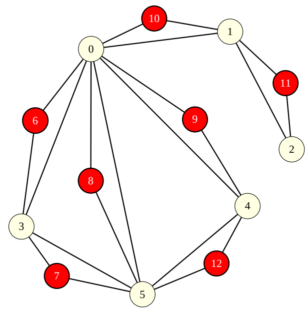
$$\sum_{i \in S_j} a_i \leq B \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, k$$

Zeigen Sie, dass es keinen Approximationsalgorithmus mit polynomieller Laufzeit für MINIMUM-BIN-PACKING gibt, der Approximationsgüte kleiner als $\frac{3}{2}$ erreicht, falls P $\neq$ NP.

Aufgabe 4 (6 PUNKTE)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ heißt *dominierend*, falls jeder Knoten aus $V - V'$ durch eine Kante mit einem Knoten in V' verbunden ist. Es sei DOMINATING-SET $= \{\langle G, k\rangle \mid G$ besitzt eine dominierende Knotenmenge der Größe $k\}$ und VERTEX-COVER $= \{\langle G, k\rangle \mid G$ besitzt eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| = k$, so dass für jede Kante mindestens einer der Endknoten zu V' gehört$\}$. Zeigen Sie VERTEX-COVER $\preceq_P$ DOMINATING-SET.





Aufgabe 5 (6 PUNKTE)

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph. Ein aufspannender Baum von G ist ein Teilgraph $G' = (V, E')$ mit $E' \subseteq E$, der einen Baum bildet, der alle Knoten in V verbindet. Ein *Hamilton-Pfad* in G ist ein einfacher Pfad, bei dem jeder Knoten genau einmal besucht wird. Die Sprache HAMILTON-PFAD $= \{\langle G\rangle \mid G$ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen Hamilton-Pfad besitzt$\}$ ist NP-vollständig. Zeigen Sie, dass ISOMORPHIC-SPANNING-TREE $= \{\langle G, T\rangle \mid T$ ist ein Baum und G ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen aufspannenden Baum besitzt, der zu T isomorph ist$\}$ eine NP-vollständige Sprache ist.

Aufgabe 6 (9 PUNKTE)

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?

(1.5 Punkte für jede richtige Antwort, 0.5 Punkte Abzug für jede falsche.)

wahr	falsch	
◯	◯	Die Sprache $\{a^i b^i c^k \mid i, k \geq 1\} \cup \{b^j c^j \mid j \geq 1\}$ ist deterministisch kontextfrei.
◯	◯	Es gibt eine reguläre Sprache L, so dass $L^* L^* \neq L^*$.
◯	◯	NAE-3-SAT $\in$ NPSPACE.
◯	◯	Jede μ-rekursive Funktion ist eine **loop**-berechenbare Funktion.
◯	◯	Falls L eine PSPACE-vollständige Sprache ist, so ist L auch NP-hart.
◯	◯	Falls L deterministisch kontextfrei ist, so ist auch L^R deterministisch kontextfrei.

Aufgabe 7 (7 PUNKTE (3+4))

Zeigen Sie, dass in jeder Kleene-Algebra für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt

(a) $1 + a^\star = a^\star$

(b) $aa^\star a \;\leq\; a^\star$

Zur Erinnerung: Eine algebraische Struktur $(\mathbb{K}, +, \cdot, ^\star, 0, 1)$ heißt Kleene Algebra, falls für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

$a + (b + c) = (a + b) + c$	(1)	$a(b + c) = ab + ac$	(8)
$a + b = b + a$	(2)	$(a + b)c = ac + bc$	(9)
$a + a = a$	(3)	$1 + aa^\star = a^\star$	(10)
$a + 0 = a$	(4)	$1 + a^\star a = a^\star$	(11)
$a(bc) = (ab)c$	(5)	$b + ac \leq c \Rightarrow a^\star b \leq c$	(12)
$a1 = 1a = a$	(6)	$b + ca \leq c \Rightarrow ba^\star \leq c$	(13)
$a0 = 0a = 0$	(7)	wobei $a \leq b$ g.d.w. $a + b = b$.	

Aufgabe 8 (7 PUNKTE (4+3))

(a) Seien α und β jeweils reguläre Ausdrücke. Zeigen Sie, dass die regulären Ausdrücke $(\alpha \cup \beta)^*$ und $(\alpha^*\beta^*)^*$ äquivalent sind, d.h., dass $\mathcal{L}((\alpha \cup \beta)^*) = \mathcal{L}((\alpha^*\beta^*)^*)$.

(b) Ein regulärer Ausdruck ist in *disjunktiver Normalform*, falls er von der Form $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_n$ für ein $n \geq 1$ ist, wobei keiner der regulären Ausdrücke γ_i das Vereinigungssymbol beinhaltet. Gibt es zu jedem regulären Ausdruck einen äquivalenten regulären Ausdruck in disjunktiver Normalform? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 9 (6 PUNKTE)

Sei $\mathsf{geh} : \mathbb{N}_0^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine primitiv rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathsf{eff} : \mathbb{N}_0^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine primitiv rekursive Funktion ist, wobei

$$\mathsf{eff}(n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}) = \sum_{i=0}^{n_{k+1}} \mathsf{geh}(n_1, \ldots, n_k, i)$$

Sie dürfen hierbei annehmen, dass die aus der Vorlesung bekannte Funktion plus bereits als primitiv rekursiv nachgewiesen ist.

Aufgabe 10 (3 PUNKTE)

Wann ist ein parametrisiertes Problem (L, κ) festparameterhandhabbar?