Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

13. Februar 2014, 9:15 - 11:15 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	10
Gesamtpunktzahl:	63

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

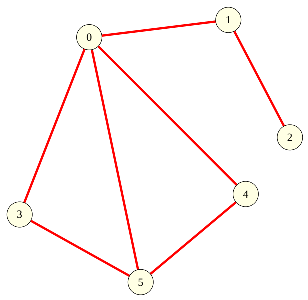
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

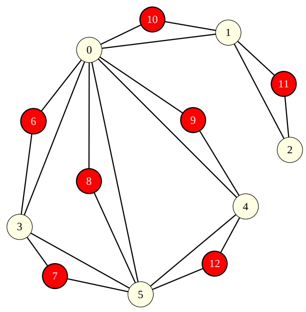
Aufgabe 1 (7 PUNKTE)

Sei HALF-CLIQUE $= \{\langle G\rangle \mid G = (V, E)$ ist ein ungerichteter Graph und es gibt eine Teilmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| \geq |V|/2$, so dass für alle $v_i, v_j \in V'$, $v_i \neq v_j$, gilt, dass die Kante zwischen v_i und v_j zu E gehört$\}$. Zeigen Sie, dass HALF-CLIQUE eine NP-vollständige Sprache ist. *Hinweis:* Zeigen Sie CLIQUE $\preceq_{\mathrm{P}}$ HALF-CLIQUE.

Aufgabe 2 (6 PUNKTE)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ heißt *dominierend*, falls jeder Knoten aus $V - V'$ durch eine Kante mit einem Knoten in V' verbunden ist. Es sei DOMINATING-SET $= \{\langle G, k\rangle \mid G$ besitzt eine dominierende Knotenmenge der Größe $k\}$ und VERTEX-COVER $= \{\langle G, k\rangle \mid G$ besitzt eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| = k$, so dass für jede Kante mindestens einer der Endknoten zu V' gehört$\}$. Zeigen Sie VERTEX-COVER $\preceq_{\mathrm{P}}$ DOMINATING-SET.





Aufgabe 3 (5 PUNKTE)

Beweisen oder widerlegen Sie: Falls $B \in$ PSPACE und $A \preceq_{\mathrm{P}} B$, so gilt auch $A \in$ PSPACE.

Aufgabe 4 (3 PUNKTE)

Geben Sie die Definition der Komplexitätsklasse APX an.

Aufgabe 5 (5 PUNKTE)

Sei $\mathscr{P}$ ein Minimierungsproblem in NPO. Nehmen Sie an, es gibt eine Konstante c, so dass die Sprache

$$\{\langle x\rangle \mid x \text{ ist eine Probleminstanz von } \mathscr{P} \text{ mit } m^*(x) \leq c\}$$

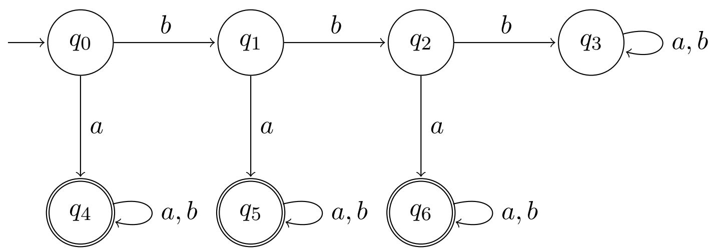
eine NP-vollständige Sprache ist. Zeigen Sie, dass es dann für $r < \frac{c+1}{c}$ keinen r-approximierenden Algorithmus für $\mathscr{P}$ mit polynomieller Laufzeit gibt, es sei denn P $=$ NP.

Aufgabe 6 (5 PUNKTE)

Seien $f : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ und $g_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sowie $g_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ jeweils **loop**-berechenbare Funktionen, die von den **loop**-Programmen Π_f, Π_{g_1} und Π_{g_2} berechnet werden. Geben Sie ein **loop**-Programm an, das die Funktion $h : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $h(n_1, n_2) = f(g(n_1), g(n_2))$ berechnet.

Aufgabe 7 (8 PUNKTE)

Konstruieren Sie den Minimalautomaten, der zu folgendem deterministischen endlichen Automaten M äquivalent ist:



Aufgabe 8 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathsf{f} : \mathbb{N}_0^3 \to \mathbb{N}_0$, die $\mathsf{f}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ berechnet, eine primitiv rekursive Funktion ist. Achten Sie darauf, dass Sie die Kompositionsschemata formal korrekt anwenden und erläutern Sie jeweils die Anwendung. Sie dürfen hierbei annehmen, dass die aus der Vorlesung bekannte Funktion mult bereits als primitiv rekursiv nachgewiesen ist.

Aufgabe 9 (9 PUNKTE)

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?

(1.5 Punkte für jede richtige Antwort, 0.5 Punkte Abzug für jede falsche.)

wahr	**falsch**	
○	○	Es gibt reguläre Sprachen, die nicht deterministisch kontextfrei sind.
○	○	Für jede Sprache L stimmen die Äquivalenzklassen von $\approx_L$ mit denen von $\approx_{\overline{L}}$ überein.
○	○	Der Schnitt zweier deterministisch kontextfreier Sprachen ist stets eine kontextfreie Sprache.
○	○	Es gibt **loop**-berechenbare Funktionen, die nicht durch eine Grammatik berechenbar sind.
○	○	Es gibt deterministisch kontextfreie Sprachen, die nicht in NP enthalten sind.
○	○	Es gibt Funktionen, die nicht primitiv rekursiv sind.

Aufgabe 10 (9 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass in jeder Kleene-Algebra $\mathbb{K}$ für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

(a) $a \leq a + b$

(b) $a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$

(c) $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$

Zur Erinnerung: Eine algebraische Struktur $(\mathbb{K}, +, \cdot, ^\star, 0, 1)$ heißt Kleene Algebra, falls für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

$a + (b + c) = (a + b) + c$	(1)	$a(b + c) = ab + ac$	(8)
$a + b = b + a$	(2)	$(a + b)c = ac + bc$	(9)
$a + a = a$	(3)	$1 + aa^\star = a^\star$	(10)
$a + 0 = a$	(4)	$1 + a^\star a = a^\star$	(11)
$a(bc) = (ab)c$	(5)	$b + ac \leq c \Rightarrow a^\star b \leq c$	(12)
$a1 = 1a = a$	(6)	$b + ca \leq c \Rightarrow ba^\star \leq c$	(13)
$a0 = 0a = 0$	(7)	wobei $a \leq b$ g.d.w. $a + b = b$.	