Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

8. Juli 2014, 11:00 - 13:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

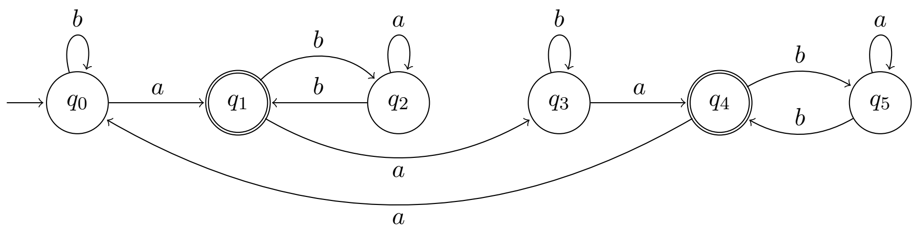
Anzahl Doppelbögen: ______________________________

Bearbeitungszeit: 120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel: Keine!
Gesamtzahl Aufgaben: 10
Gesamtpunktzahl: 62

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Konstruieren Sie den Minimalautomaten, der zu folgendem deterministischen endlichen Automaten äquivalent ist:



Aufgabe 2 (8 Punkte)
Zur Erinnerung: Eine algebraische Struktur $(\mathbb{K}, +, \cdot, ^\star, 0, 1)$ heißt Kleene Algebra, falls für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

$$
\begin{aligned}
a + (b + c) &= (a + b) + c && (1) & a(b + c) &= ab + ac && (8)\\
a + b &= b + a && (2) & (a + b)c &= ac + bc && (9)\\
a + a &= a && (3) & 1 + aa^\star &= a^\star && (10)\\
a + 0 &= a && (4) & 1 + a^\star a &= a^\star && (11)\\
a(bc) &= (ab)c && (5) & b + ac \leq c &\Rightarrow a^\star b \leq c && (12)\\
a1 = 1a &= a && (6) & b + ca \leq c &\Rightarrow ba^\star \leq c && (13)\\
a0 = 0a &= 0 && (7) & &\text{wobei } a \leq b \text{ g.d.w. } a + b = b.
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie, dass in jeder Kleene-Algebra $\mathbb{K}$ für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt

(a) $a^\star \leq a^\star + b$

(b) $b + a^\star b = a^\star b$

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Sprache SET-SPLITTING $= \{\langle S, C\rangle \mid S$ ist eine endliche Menge und $C = \{C_1, \ldots, C_k\}$ ist eine Familie von $k > 0$ Teilmengen von S und man kann die Elemente von S jeweils rot oder blau einfärben, so dass in keiner Teilmenge C_i aus C alle Elemente die gleiche Farbe haben$\}$ eine NP-vollständige Sprache ist, indem Sie NAE-3-SAT auf SET-SPLITTING reduzieren.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathsf{plus} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathsf{plus}(n_1, n_2) = n_1 + n_2$ durch Anwendung von Substitution und primitiver Rekursion direkt aus den Basisfunktionen erzeugt werden kann. Achten Sie darauf, dass Sie die Kompositionsschemata formal korrekt anwenden und erläutern Sie jeweils die Anwendung.

Aufgabe 5 (5 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Funktion positive : $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit

$$\mathsf{positive}(n_1) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n_1 \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine **loop**-berechenbare Funktion ist, indem Sie ein **loop**-Programm angeben, das die Funktion berechnet.

Aufgabe 6 (6 PUNKTE)

(a) Geben Sie ein Approximationsverfahren zur Bestimmung eines Vertex Cover in einem einfachen Graphen an, das in Polynomialzeit Approximationsgüte 2 erreicht.

(b) Begründen Sie, warum ihr Verfahren Approximationsgüte 2 erreicht.

Aufgabe 7 (5 PUNKTE)

Beim NP-vollständigen Problem PARTITION sind $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ gegeben und es ist zu entscheiden, ob es $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt, so dass

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$$

Beim MINIMUM-BIN-PACKING Problem sind eine Korbgröße $B \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \leq B$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gegeben. Gesucht ist das minimale k, so dass es eine Partition von $\{1, \ldots, n\}$ in k Teilmengen $S_1, \ldots, S_k$ gibt mit

$$\sum_{i \in S_j} a_i \leq B \qquad \text{für alle } j = 1, \ldots, k$$

Zeigen Sie, dass es keinen Approximationsalgorithmus mit polynomieller Laufzeit für MINIMUM-BIN-PACKING gibt, der Approximationsgüte kleiner als $\frac{3}{2}$ erreicht, falls P $\neq$ NP.

Aufgabe 8 (9 PUNKTE)

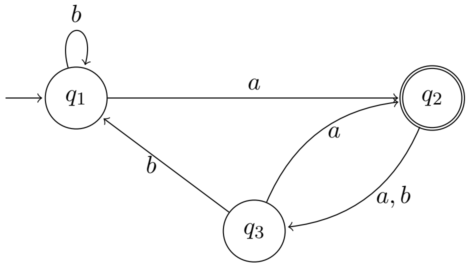
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?

(1.5 Punkte für jede richtige Antwort, 0.5 Punkte Abzug für jede falsche.)

wahr	falsch	
○	○	Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und sei $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$. Dann ist $[a]_{\approx_L} = \mathcal{L}(a^*)$.
○	○	Sei $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$. Dann ist $a^8 b^{17} a^9 \in \mathsf{cyc}(L)$.
○	○	Falls $B \in$ PSPACE und $A \preceq_{\mathrm{P}} B$, so gilt auch $A \in$ PSPACE.
○	○	Die Ackermann-Péter Funktion ist primitiv rekursiv.
○	○	Jede durch eine Grammatik berechenbare Funktion ist auch **loop**-berechenbar.
○	○	Es gibt zwei reguläre Sprachen, deren Vereinigung nicht deterministisch kontextfrei ist.

Aufgabe 9 (6 PUNKTE)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und sei $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ der durch das folgendes Diagramm gegebene deterministische endliche Automat:



Für $q \in Q$ sei wie in der Vorlesung $X_q = \{w \in \Sigma^* \mid (q, w) \vdash_M^* (f, \varepsilon), f \in F\}$. Geben Sie das zu M gehörige Gleichungssystem für die X_q, $q \in Q$, über der zugehörigen Kleene Algebra bzgl. der Sprachen über Σ an.

Aufgabe 10 (3 PUNKTE)

Sei $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ und sei $L_2 = \mathcal{L}(b^*)$. Geben Sie L_1 / L_2 an (ohne Beweis).