Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

11. Februar 2015, 9:15 - 11:15 Uhr

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	10
Gesamtpunktzahl:	60

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Aufgabe 1 (5 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathsf{factorial}(n) = n!$ primitiv rekursiv ist. Achten Sie darauf, dass Sie die Kompositionsschemata formal korrekt anwenden, also genauso, wie es in der Definition der Operatoren verlangt wird, und erläutern Sie jeweils die Anwendung. Sie dürfen hierbei annehmen, dass die aus der Vorlesung bekannte Funktion mult bereits als primitiv rekursiv nachgewiesen ist.

Aufgabe 2 (5 PUNKTE)

Sei $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine **loop**-berechenbare Funktion und sei Π_g ein **loop**-Programm, das diese Funktion g berechnet. Zeigen Sie, dass dann auch die folgende Funktion f eine **loop**-berechenbare Funktion ist:

$$f(n_1, n_2) = g^{n_2}(n_1) = \underbrace{g(g(\ldots g(}_{n_2-\text{mal}} n_1)\ldots)) \quad \text{wobei } g^0(n_1) = n_1$$

Aufgabe 3 (6 PUNKTE)

Ein *Hamilton-Pfad* ist ein einfacher Pfad, bei dem jeder Knoten eines Graphen genau einmal besucht wird. Die Sprache HAMILTON-PFAD $= \{\langle G\rangle \mid G$ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen Hamilton-Pfad besitzt$\}$ ist NP-vollständig. Zeigen Sie, dass die Sprache LONGEST-PATH $= \{\langle G, k\rangle \mid G$ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen einfachen Pfad der Länge mindestens k besitzt$\}$ eine NP-vollständige Sprache ist.

Aufgabe 4 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Sprache SET-SPLITTING $= \{\langle S, C\rangle \mid S$ ist eine endliche Menge und $C = \{C_1, \ldots, C_k\}$ ist eine Familie von $k > 0$ Teilmengen von S und man kann die Elemente von S jeweils weiß oder blau einfärben, so dass in keiner Teilmenge C_i aus C alle Elemente die gleiche Farbe haben$\}$ eine NP-vollständige Sprache ist, indem Sie NAE-3-SAT auf SET-SPLITTING reduzieren.

Aufgabe 5 (5 PUNKTE)

Beweisen oder widerlegen Sie: Falls $B \in$ PSPACE und $A \preceq_{\mathrm{P}} B$, so gilt auch $A \in$ PSPACE.

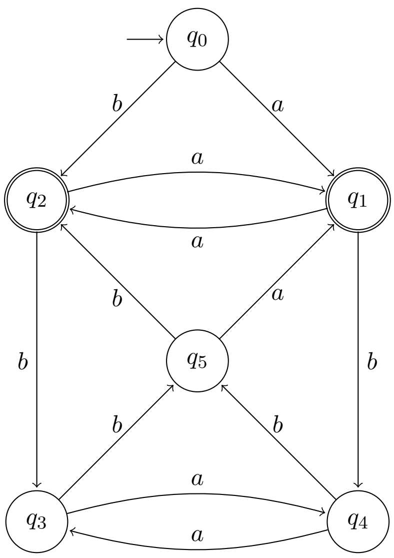
Aufgabe 6 (5 PUNKTE)
Ist die Klasse PSPACE unter Vereinigung abgeschlossen? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 7 (5 PUNKTE)
Sei $L = \{a^k b^j \mid 1 \leq k \leq 3,\ 0 \leq j\}$. Geben Sie für alle Äquivalenzklassen von $\{a, b\}^*$ bzgl. $\approx_L$ jeweils einen Repräsentanten an.

Aufgabe 8 (9 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
(1.5 Punkte für jede richtige Antwort, 0.5 Punkte Abzug für jede falsche.)

wahr	falsch	
◯	◯	Für jede von einer rechtslinearen Grammatik erzeugte Sprache L besitzt $\approx_L$ unendlich viele Äquivalenzklassen.
◯	◯	Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Substitution durch reguläre Sprachen.
◯	◯	In jeder Kleene Algebra $\mathbb{K}$ gilt $1 + a^\star = a^\star$ für alle $a \in \mathbb{K}$.
◯	◯	Das Halteproblem ist festparameterhandhabbar.
◯	◯	Jede **loop**-berechenbare Funktion ist auch durch eine Grammatik berechenbar.
◯	◯	Es gibt **while**-berechenbare Funktionen, die nicht Turing-berechenbar sind.

Aufgabe 9 (8 PUNKTE)
Konstruieren Sie den Minimalautomaten, der zu folgendem deterministischen endlichen Automaten äquivalent ist:



Aufgabe 10 (6 PUNKTE)

(a) Geben Sie ein Approximationsverfahren zur Bestimmung eines Vertex Cover in einem einfachen Graphen an, das in Polynomialzeit Approximationsgüte 2 erreicht.

(b) Begründen Sie, warum ihr Verfahren Approximationsgüte 2 erreicht.