Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

24. Februar 2017, 9:00 - 11:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	10
Gesamtpunktzahl:	64

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Aufgabe 1 (7 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Sprache LARGEST-SIMPLE-CYCLE $= \{\langle G, k\rangle \mid G$ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen einfachen Kreis mit k Knoten besitzt$\}$ eine NP-vollständige Sprache ist. Sie dürfen dabei alle NP-vollständigen Sprachen benutzen, von denen wir in den Vorlesungen und den Übungen nachgewiesen haben, dass sie NP-vollständig sind.

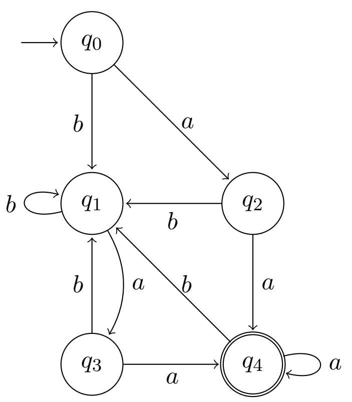
Aufgabe 2 (7 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass SET-COVER $= \{\langle U, \mathcal{F}, k\rangle \mid \exists\, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}, |\mathcal{C}| = k$, mit $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} = U\}$ NP-vollständig ist.

Hinweis: Reduzieren Sie VERTEX-COVER auf SET-COVER.

Aufgabe 3 (7 PUNKTE)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und sei $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ der durch das folgende Diagramm gegebene deterministische endliche Automat. Konstruieren Sie den zu M äquivalenten Minimalautomaten.



Aufgabe 4 (6 PUNKTE)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ der durch das Diagramm aus Aufgabe 3 gegebene endliche Automat und sei $\Sigma = \{a, b\}$. Für $q \in Q$ sei wie in der Vorlesung

$$X_q = \{w \in \Sigma^* \mid (q, w) \vdash_M^* (f, \varepsilon), f \in F\}$$

Geben Sie das zu M gehörige Gleichungssystem für die X_q, $q \in Q$, über der zugehörigen Kleene Algebra bzgl. der Sprachen über Σ an.

Aufgabe 5 (5 PUNKTE)
Ist die Klasse PSPACE unter Konkatenation abgeschlossen? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 6 (6 PUNKTE)
Sei $g : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ eine primitiv rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion $f : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit

$$f(n_1, n_2) = g(n_1 \cdot n_2,\ n_1 + n_2)$$

eine primitiv rekursive Funktion ist. Sie dürfen hierbei annehmen, dass die aus der Vorlesung bekannten Funktionen plus und mult bereits als primitiv rekursiv nachgewiesen sind. Achten Sie darauf, dass Sie die Kompositionsschemata formal korrekt anwenden, also genauso, wie es in der Definition der Operatoren verlangt wird.

Aufgabe 7 (6 PUNKTE)

(a) Geben Sie ein Approximationsverfahren zur Bestimmung eines Vertex Cover in einem einfachen Graphen an, das in Polynomialzeit Approximationsgüte 2 erreicht.

(b) Begründen Sie, warum ihr Verfahren Approximationsgüte 2 erreicht.

Aufgabe 8 (9 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
(1.5 Punkte für jede richtige Antwort, 0.5 Punkte Abzug für jede falsche.)

wahr	falsch	
◯	◯	Falls P $\neq$ NP, so gibt es keinen Polynomialzeitalgorithmus, der für das Knotenfärbungsproblem Approximationsgüte kleiner als $\frac{4}{3}$ erreicht.
◯	◯	Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist unter Komplementbildung nicht abgeschlossen.
◯	◯	Jede **while**-berechenbare Funktion ist auch **loop**-berechenbar.
◯	◯	FPTAS $\subseteq$ APX
◯	◯	In jeder Kleene Algebra $\mathbb{K}$ gilt $a^{\star\star} = a^\star$ für alle $a \in \mathbb{K}$.
◯	◯	Es gibt eine reguläre Sprache L, so dass $L^*L^* \neq L^*$.

Aufgabe 9 (6 PUNKTE)
Zur Erinnerung: Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ heißt *durch eine Grammatik berechenbar*, falls es eine Grammatik $G = (V, \{0, 1, \ldots\}, R, S)$ gibt, so dass für alle $n_1, m \in \mathbb{N}_0$ genau dann

$$S\ \text{bin}(n_1)\ S \quad \Rightarrow_G^* \quad \text{bin}(m)$$

gilt, wenn $f(n_1) = m$.
Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathsf{double} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit

$$\mathsf{double}(n_1) = 2 \cdot n_1$$

durch eine Grammatik berechenbar ist.

Aufgabe 10 (5 PUNKTE)
Ist jede PSPACE-vollständige Sprache auch NP-hart? Begründen Sie ihre Antwort.