

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2



9. Juli 2018, 11:00 - 13:00 Uhr

Name, Vorname: _____ Bearbeitungszeit: 120 Min.
 Matrikelnummer: _____ Zugelassene Hilfsmittel: Keine!
 Anzahl Doppelbögen: _____ Gesamtzahl Aufgaben: 10
 Gesamtpunktzahl: 63

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Aufgabe 1 (7 PUNKTE)

Ein *Hamilton-Pfad* ist ein einfacher Pfad, bei dem jeder Knoten eines Graphen genau einmal besucht wird. Die Sprache $HAMILTON-PFAD = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen Hamilton-Pfad besitzt} \}$ ist NP-vollständig. Zeigen Sie, dass $MINIMUM-LEAVES-SPANNING-TREE = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen aufspannenden Baum besitzt, der höchstens } k \text{ Blätter (= Knoten vom Grad 1) hat} \}$ eine NP-vollständige Sprache ist.

Aufgabe 2 (4 PUNKTE)

Ist die Klasse PSPACE unter Konkatination abgeschlossen? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 3 (9 PUNKTE)

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
 (1.5 Punkte für jede richtige Antwort, 0.5 Punkte Abzug für jede falsche.)

wahr falsch

- Es gibt Probleme in P, die nicht festparameterhandhabbar sind.
- Es gibt eine durch eine Grammatik berechenbare Funktion, die nicht **loop**-berechenbar ist.
- Es gibt PSPACE-harte Sprachen, die nicht NP-hart sind.
- $PTAS \subseteq APX$
- Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist unter Homomorphismen nicht abgeschlossen.
- Sei $L = L((ab)^*)$. Dann besitzt \approx_L unendlich viele Äquivalenzklassen.

Aufgabe 4 (5 PUNKTE)

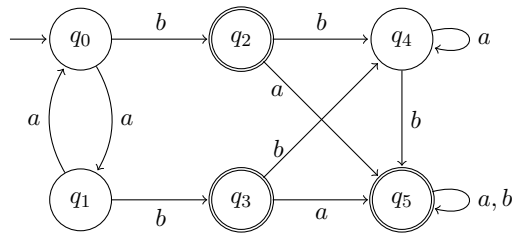
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und sei $L = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R \text{ und } |w| \text{ ist ungerade}\}$. Geben Sie eine reguläre Sprache L_{reg} an, so dass $\Psi_{\Sigma}(L_{reg}) = \Psi_{\Sigma}(L)$.

Aufgabe 5 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $double : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $double(n_1) = 2 \cdot n_1$ eine **loop**-berechenbare Funktion ist, indem Sie ein **loop**-Programm angeben, das die Funktion $double$ berechnet.

Aufgabe 6 (8 PUNKTE)

Konstruieren Sie den Minimalautomaten, der zu dem folgenden deterministischen endlichen Automaten äquivalent ist:



Aufgabe 7 (7 PUNKTE)

Zeigen Sie auf direktem Weg, also ohne Umweg über äquivalente Berechnungsmodelle, dass die Funktion $\text{multplusplus} : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $\text{multplusplus}(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2 + 1$ eine primitiv rekursive Funktion ist. Sie dürfen hierbei lediglich annehmen, dass die aus der Vorlesung bekannte Funktion plus bereits als primitiv rekursiv nachgewiesen ist, nicht aber die aus der Vorlesung bekannte Funktion mult. Achten Sie darauf, dass Sie die Kompositionsschemata formal korrekt anwenden, also genauso, wie es in der Definition der Operatoren verlangt wird.

Aufgabe 8 (5 PUNKTE)

Beim NP-vollständigen Problem PARTITION sind $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ gegeben und es ist zu entscheiden, ob es $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ gibt, so dass

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$$

Beim MINIMUM-BIN-PACKING Problem sind eine Korbgröße $B \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \leq B$ für alle $i = 1, \dots, n$ gegeben. Gesucht ist das minimale k , so dass es eine Partition von $\{1, \dots, n\}$ in k Teilmengen S_1, \dots, S_k gibt mit

$$\sum_{i \in S_j} a_i \leq B \quad \text{für alle } j = 1, \dots, k$$

Zeigen Sie, dass es keinen Approximationsalgorithmus mit polynomieller Laufzeit für MINIMUM-BIN-PACKING gibt, der Approximationsgüte kleiner als $\frac{3}{2}$ erreicht, falls $P \neq NP$.

Aufgabe 9 (6 PUNKTE)

- (a) Geben Sie ein Approximationsverfahren zur Bestimmung eines Vertex Cover in einem einfachen Graphen an, das in Polynomialzeit Approximationsgüte 2 erreicht.
- (b) Begründen Sie, warum ihr Verfahren Approximationsgüte 2 erreicht.

Aufgabe 10 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie mit Hilfe von Ogden's Lemma, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, i < j \text{ und } k < 2j\}$$

nicht kontextfrei ist. Betrachten Sie dazu beispielsweise $z = a^n b^{n+1} c^{2n+1}$ und markieren Sie alle b .