Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

22. Februar 2019, 9:00 - 11:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	10
Gesamtpunktzahl:	64

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Aufgabe 1 (7 PUNKTE)

Sei HITTING-SET $= \{\langle \mathscr{C}, k\rangle \mid \mathscr{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ ist eine Familie von m Teilmengen einer endlichen Menge U, und es gibt eine Menge $S \subseteq U$ der Größe höchstens k, so dass für alle Teilmengen C_i in C gilt $S \cap C_i \neq \emptyset\}$. Zeigen Sie, dass HITTING-SET NP-vollständig ist. Sie dürfen annehmen, dass VERTEX-COVER bereits als NP-vollständig nachgewiesen ist.

Aufgabe 2 (7 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Sprache LARGEST-SIMPLE-CYCLE $= \{\langle G, k\rangle \mid G$ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen einfachen Kreis mit mindestens k Knoten besitzt$\}$ eine NP-vollständige Sprache ist. Sie dürfen dabei alle Sprachen benutzen, von denen wir in den Vorlesungen oder den Übungen zu Grundlagen der Theoretischen Informatik nachgewiesen haben, dass sie NP-vollständig sind.

Aufgabe 3 (9 PUNKTE)

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
(1.5 Punkte für jede richtige Antwort, 0.5 Punkte Abzug für jede falsche.)

wahr	falsch	
◯	◯	Falls $B \in$ PSPACE und $A \preceq_{\mathrm{P}} B$, so gilt auch $A \in$ PSPACE.
◯	◯	Es gibt deterministisch kontextfreie Sprachen, die nicht in PSPACE enthalten sind.
◯	◯	Jede primitiv rekursive Funktion ist auch durch eine Grammatik berechenbar.
◯	◯	Für jede Sprache L stimmen die Äquivalenzklassen von $\approx_L$ mit denen von $\approx_{\overline{L}}$ überein.
◯	◯	MINIMUM-LEAVES-SPANNING-TREE $\in$ NPSPACE.
◯	◯	Die Klasse PSPACE ist unter Konkatenation nicht abgeschlossen.

Aufgabe 4 (6 PUNKTE)

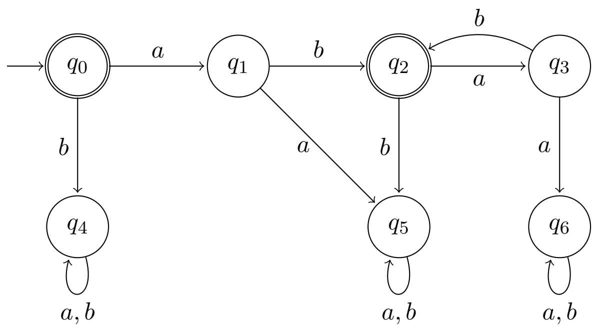
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit

$$f(n_1, n_2) = \min(n_1, n_2)$$

eine **loop**-berechenbare Funktion ist, indem Sie ein **loop**-Programm angeben, das die Funktion f berechnet.

Aufgabe 5 (5 PUNKTE)
Wir betrachten das Problem, die Knoten eines Graphen mit minimal vielen Farben zulässig zu färben, d.h. so, dass die Endknoten einer jeden Kante unterschiedliche Farben haben. Erinnern Sie sich daran, dass die Sprache 3-FÄRBBARKEIT $= \{\langle G\rangle \mid G$ ist 3-knotenfärbbar$\}$ eine NP-vollständige Sprache ist. Zeigen Sie, dass es keinen Approximationsalgorithmus für das zulässige Färben der Knoten eines Graphen gibt, der Approximationsgüte kleiner als $\frac{4}{3}$ erreicht, falls P $\neq$ NP.

Aufgabe 6 (8 PUNKTE)
Konstruieren Sie den Minimalautomaten, der zu dem folgenden deterministischen endlichen Automaten äquivalent ist:



Aufgabe 7 (6 PUNKTE)
Zeigen Sie auf direktem Weg, also ohne Umweg über äquivalente Berechnungsmodelle, dass die Funktion $\mathsf{power} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit

$$\mathsf{power}(n_1, n_2) = n_1^{n_2}$$

eine primitiv rekursive Funktion ist. Sie dürfen hierbei annehmen, dass die aus der Vorlesung bekannten Funktionen plus und mult bereits als primitiv rekursiv nachgewiesen sind. Achten Sie darauf, dass Sie die Kompositionsschemata formal korrekt anwenden, also genauso, wie es in der Definition der Operatoren verlangt wird.

Aufgabe 8 (5 PUNKTE)
Beweisen oder widerlegen Sie:

> *Falls R und L Sprachen über einem Alphabet Σ sind und R eine reguläre Sprache ist, so ist auch $R/L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\, y \in L$, so dass $xy \in R\}$ eine reguläre Sprache.*

Aufgabe 9 (5 PUNKTE)
Für eine Boolesche Formel in konjunktiver Normalform, in der alle Klauseln aus höchstens drei Literalen bestehen, sei $\kappa(\langle\phi\rangle) =$ Anzahl der in ϕ vorkommenden verschiedenen Variablen. Zeigen Sie, dass $(3\text{-SAT}, \kappa)$ festparameterhandhabbar ist.

Aufgabe 10 (6 PUNKTE)
Zeigen Sie mit Hilfe von Ogdens Lemma, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0,\ i < j \text{ und } k < 2j\}$$

nicht kontextfrei ist. Betrachten Sie dazu beispielsweise $z = a^n b^{n+1} c^{2n+1}$ und markieren Sie alle b.