Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

12. Juli 2021, 12:00 - 14:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit:	120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Keine!
Gesamtzahl Aufgaben:	11
Gesamtpunktzahl:	66

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Aufgabe 1 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathsf{achtn} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathsf{achtn}(n_1) = 8 \cdot n_1$ eine durch eine Grammatik berechenbare Funktion ist, indem Sie eine Grammatik angeben, die die Funktion achtn berechnet.

Aufgabe 2 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathsf{znpz} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathsf{znpz}(n_1) = 2 \cdot n_1 + 2$ eine **loop**-berechenbare Funktion ist, indem Sie ein **loop**-Programm angeben, das die Funktion znpz berechnet.

Aufgabe 3 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie auf direktem Weg, also ohne Umweg über äquivalente Berechnungsmodelle, dass die einstellige Funktion nchoose2 mit

$$\mathsf{nchoose2}(n_1) = \binom{n_1}{2}$$

und $\mathsf{nchoose2}(0) = 0 = \mathsf{nchoose2}(1)$ eine primitiv rekursive Funktion ist. Sie dürfen hierbei lediglich annehmen, dass die aus der Vorlesung bekannte Funktion plus bereits als primitiv rekursiv nachgewiesen ist.

Aufgabe 4 (9 PUNKTE)

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?

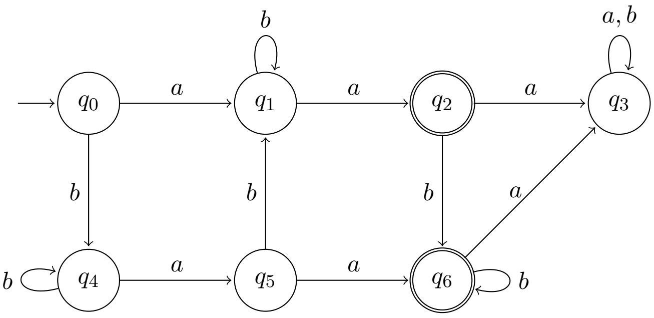
(1.5 Punkte für jede richtige Antwort, 0.5 Punkte Abzug für jede falsche.)

wahr	falsch	
◯	◯	PTAS $\subseteq$ APX
◯	◯	Es gibt eine Sprache L, für die die Äquivalenzklassen von $\approx_L$ und $\approx_{\overline{L}}$ verschieden sind.
◯	◯	Jede durch eine Grammatik berechenbare Funktion ist primitiv rekursiv.
◯	◯	Es gibt reguläre Sprachen, die nicht deterministisch kontextfrei sind.
◯	◯	Falls L eine PSPACE-vollständige Sprache ist, so gilt HAMILTONKREIS $\preceq_{\mathrm{P}} L$.
◯	◯	Die Sprache POSITIVE-3-SAT $= \{\langle \phi \rangle \mid \phi$ ist eine Boolesche Formel in konjunktiver Normalform, in der alle Klauseln aus genau 3 Literalen bestehen und in der keine Variable negiert vorkommt, und ϕ ist erfüllbar$\}$ ist keine NP-vollständige Sprache, es sei denn P $=$ NP.

Aufgabe 5 (4 PUNKTE)
Ist $\{\langle M_1, M_2\rangle \mid M_1$ und M_2 sind deterministische Kellerautomaten und $L_f(M_1) \cap L_f(M_2)$ ist deterministisch kontextfrei$\}$ eine PSPACE-vollständige Sprache? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 6 (4 PUNKTE)
Folgt aus $B \in$ NPSPACE und $A \preceq_P B$ dass $A \in$ PSPACE gilt? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 7 (9 PUNKTE)
Konstruieren Sie den zu folgendem deterministischen endlichen Automaten äquivalenten Minimalautomaten.

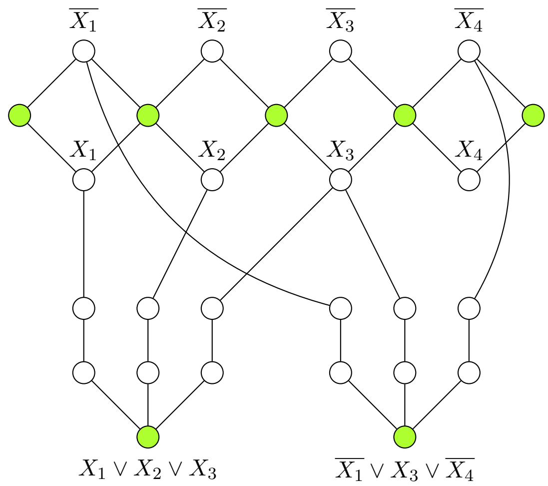


q_1	○					
q_2	○	○				
q_3	○	○	○			
q_4	○	○	○	○		
q_5	○	○	○	○	○	
q_6	○	○	○	○	○	○
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5

Aufgabe 8 (4 PUNKTE)
UNGERICHTETER-HAMILTONPFAD $= \{\langle G\rangle \mid G$ ist ein ungerichteter Graph, der einen Hamiltonpfad besitzt$\} \subseteq \Sigma^*$ ist eine Sprache in NP. Ferner ist ISOMORPHIC-SPANNING-TREE $= \{\langle G, T\rangle \mid T$ ist ein Baum und G ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen aufspannenden Baum besitzt, der zu T isomorph ist$\} \subseteq \Gamma^*$ eine NP-vollständige Sprache. Also gilt UNGERICHTETER-HAMILTONPFAD $\preceq_P$ ISOMORPHIC-SPANNING-TREE. Geben Sie eine in Polynomialzeit berechenbare Funktion $\tau : \Sigma^* \to \Gamma^*$ an mit $w \in$ UNGERICHTETER-HAMILTONPFAD genau dann wenn $\tau(w) \in$ ISOMORPHIC-SPANNING-TREE. Sie brauchen nicht nachzuweisen, dass τ die geforderte Bedingung erfüllt.

Aufgabe 9 (7 PUNKTE)
Zeigen Sie, dass auch die Sprache STEINERBAUM-BIPARTIT $= \{\langle G = (V, E), T, k\rangle \mid G$ ist ein ungerichteter bipartiter Graph mit nichtnegativen ganzzahligen Kantengewichten, der einen Steinerbaum für $T \subseteq V$ besitzt, dessen Kantengesamtgewicht höchstens k ist$\}$ eine NP-vollständige Sprache ist.

Hinweis: Reduzieren Sie 3-SAT auf STEINERBAUM-BIPARTIT, so dass der zu einer Formel mit m Klauseln in n Variablen konstruierte bipartite Graph genau dann einen Steinerbaum mit $2n + 3m$ Kanten hat, wenn die Formel erfüllbar ist.
Illustration der Konstruktion an einem Beispiel:



Aufgabe 10 (5 PUNKTE)
Wir betrachten das Problem, die Knoten eines Graphen mit minimal vielen Farben zulässig zu färben, d.h. so, dass die Endknoten einer jeden Kante unterschiedliche Farben haben. Zeigen Sie, dass es keinen Algorithmus gibt, der Approximationsgüte kleiner als $\frac{4}{3}$ erreicht, falls P $\neq$ NP.

Aufgabe 11 (6 PUNKTE)
Zeigen Sie mit Hilfe von Ogdens Lemma, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0,\ i < j \text{ und } k < 2j\}$$

nicht kontextfrei ist. Betrachten Sie dazu beispielsweise $z = a^n b^{n+1} c^{2n+1}$ und markieren Sie alle b.