Schriftliche Prüfung im Fach

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

23. Februar 2021, 10:00 - 12:00 Uhr

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Anzahl Doppelbögen: ______________________

Bearbeitungszeit: 120 Min.
Zugelassene Hilfsmittel: Keine!
Gesamtzahl Aufgaben: 11
Gesamtpunktzahl: 66

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Aufgabe 1 (6 PUNKTE)
Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathsf{achtn} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathsf{achtn}(n_1) = 8 \cdot n_1$ eine durch eine Grammatik berechenbare Funktion ist, indem Sie eine Grammatik angeben, die die Funktion achtn berechnet.

Aufgabe 2 (6 PUNKTE)
Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathsf{znpe} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathsf{znpe}(n_1) = 2 \cdot n_1 + 1$ eine **loop**-berechenbare Funktion ist, indem Sie ein **loop**-Programm angeben, das die Funktion znp1 berechnet.

Aufgabe 3 (6 PUNKTE)
Zeigen Sie auf direktem Weg, also ohne Umweg über äquivalente Berechnungsmodelle, dass die Funktion $\mathsf{addup} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit

$$\mathsf{addup}(n_1) = \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{2}$$

eine primitiv rekursive Funktion ist. Sie dürfen hierbei lediglich annehmen, dass die aus der Vorlesung bekannte Funktion plus bereits als primitiv rekursiv nachgewiesen ist.

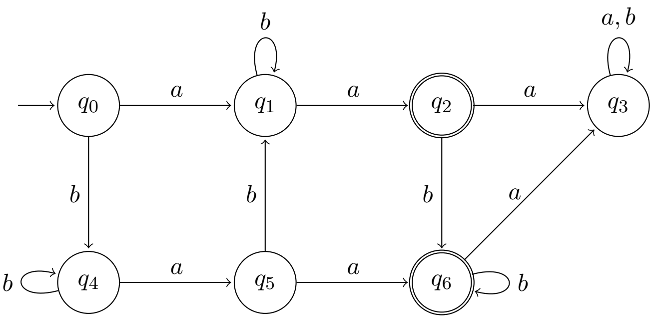
Aufgabe 4 (12 PUNKTE)
Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?
(1.5 Punkte für jede richtige Antwort, 0.5 Punkte Abzug für jede falsche.)

wahr	falsch	
◯	◯	Jede PSPACE-vollständige Sprache ist auch NP-hart.
◯	◯	Jede durch eine Grammatik berechenbare Funktion ist primitiv rekursiv.
◯	◯	Es gibt **while**-berechenbare Funktionen, die nicht Turing-berechenbar sind.
◯	◯	NAE-3-SAT $\in$ NPSPACE.
◯	◯	Falls $B \in$ NPSPACE und $A \preceq_{\mathrm{P}} B$, so gilt $A \in$ PSPACE.
◯	◯	Es gibt reguläre Sprachen, deren Schnitt nicht deterministisch kontextfrei ist.
◯	◯	Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Substitution durch reguläre Sprachen.
◯	◯	Es gibt eine Sprache L, für die die Äquivalenzklassen von $\approx_L$ mit denen von $\approx_{\overline{L}}$ nicht übereinstimmen.

Aufgabe 5 (3 PUNKTE)
Sei $L = L(\ (aab)^*\ )/L(\ (ab)^*\ )$. Besitzt $\approx_L$ unendlich viele Äquivalenzklassen? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 6 (4 PUNKTE)
Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. Wir bestimmen ein maximales Matching $M \subseteq E$ in G, also eine Kantenmenge, zu der keine Kante mehr hinzugefügt werden kann, ohne die Matchingeigenschaft zu verletzen. Sei V' die Menge der Endknoten aller Kanten in M. Die Knotenmenge V' ist ein Vertex Cover, denn gäbe es noch eine Kante in E, die nicht von V' überdeckt wird, so könnte man diese Kante zu M hinzufügen, ohne die Matchingeigenschaft zu verletzen. Welche Approximationsgüte erreichen wir auf diesem Weg? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 7 (8 PUNKTE)
Konstruieren Sie den Minimalautomaten, der zu dem folgenden deterministischen endlichen Automaten äquivalent ist:



q_1	○					
q_2	○	○				
q_3	○	○	○			
q_4	○	○	○	○		
q_5	○	○	○	○	○	
q_6	○	○	○	○	○	○
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5

Aufgabe 8 (4 PUNKTE)
UNGERICHTETER-HAMILTONPFAD $= \{\langle G\rangle \mid G$ ist ein ungerichteter Graph, der einen Hamiltonpfad besitzt$\} \subseteq \Sigma^*$ ist eine Sprache in NP. Ferner ist ISOMORPHIC-SPANNING-TREE $= \{\langle G, T\rangle \mid T$ ist ein Baum und G ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen aufspannenden Baum besitzt, der zu T isomorph ist$\} \subseteq \Gamma^*$ eine NP-vollständige Sprache. Also gilt UNGERICHTETER-HAMILTONPFAD $\preceq_{\mathrm{P}}$ ISOMORPHIC-SPANNING-TREE. Geben Sie eine in Polynomialzeit berechenbare Funktion $\tau : \Sigma^* \to \Gamma^*$ an mit $w \in$ UNGERICHTETER-HAMILTONPFAD genau dann wenn $\tau(w) \in$ ISOMORPHIC-SPANNING-TREE. Sie brauchen nicht nachzuweisen, dass τ die geforderte Bedingung erfüllt.

Aufgabe 9 (6 PUNKTE)
Zeigen Sie, dass die Sprache PARTITION-INTO-HAMILTONIAN-SUBGRAPHS $= \{\langle G, k\rangle \mid G = (V, E)$ ist ein gerichteter Graph, dessen Knotenmenge V in nicht-leere Teilmengen $V_1, \ldots, V_k$ zerlegt werden kann, so dass die durch $V_1, \ldots, V_k$ induzierten Teilgraphen von G jeweils einen Hamiltonkreis besitzen$\}$ eine NP-vollständige Sprache ist. Sie dürfen dabei alle anderen Sprachen benutzen, von denen wir in den Vorlesungen oder den Übungen zu Grundlagen der Theoretischen Informatik I und II nachgewiesen haben, dass sie NP-vollständig sind.

Aufgabe 10 (5 PUNKTE)
Wir betrachten das Problem, die Knoten eines Graphen mit minimal vielen Farben zulässig zu färben, d.h. so, dass die Endknoten einer jeden Kante unterschiedliche Farben haben. Zeigen Sie, dass es keinen Algorithmus gibt, der Approximationsgüte kleiner als $\frac{4}{3}$ erreicht, falls P $\neq$ NP.

Aufgabe 11 (6 PUNKTE)
Zeigen Sie mit Hilfe von Ogdens Lemma, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0,\ i < j \text{ und } k < 2j\}$$

nicht kontextfrei ist. Betrachten Sie dazu beispielsweise $z = a^n b^{n+1} c^{2n+1}$ und markieren Sie alle b.