

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

22. Juli 2022, 8:00 - 10:00 Uhr

OTTO VON GUERICKE
UNIVERSITÄT
MAGDEBURG

INF

Name, Vorname: _____

Bearbeitungszeit: 120 Min.

Matrikelnummer: _____

Zugelassene Hilfsmittel: Keine!

Anzahl Doppelbögen: _____

Gesamtzahl Aufgaben: 10

Gesamtpunktzahl: 68

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Aufgabe 1 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\text{halfup} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $\text{halfup}(n_1) = \lceil n_1/2 \rceil$ eine durch eine Grammatik berechenbare Funktion ist, indem Sie eine Grammatik angeben, die die Funktion halfup berechnet.

Aufgabe 2 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die zweistellige Funktion $\text{bbl} : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit

$$\text{bbl}(n_1, n_2) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{n_1}}}}}} \} n_2 \text{ Zweien}$$

und $\text{bbl}(n_1, 0) = n_1$ eine primitiv rekursive Funktion ist. Sie dürfen annehmen, dass die aus der Vorlesung bzw. den Übungen bekannten Funktionen plus, mult und power bereits als primitiv rekursiv nachgewiesen sind.

Aufgabe 3 (6 PUNKTE)

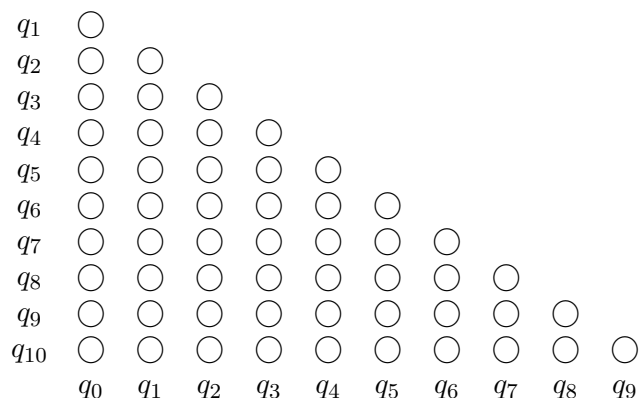
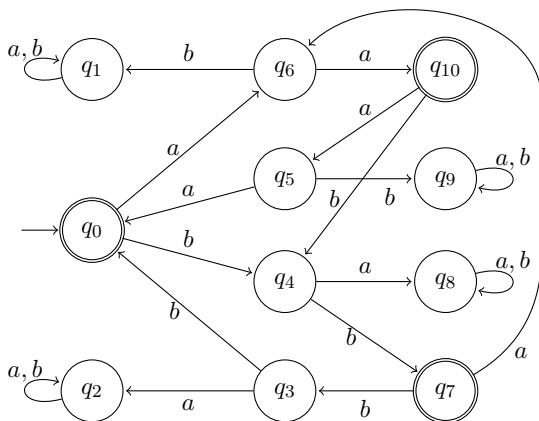
Die Leonardo-Zahlen sind durch die Funktion $L : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ wie folgt definiert:

$$L(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ L(n-1) + L(n-2) + 1 & n \geq 2 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass L eine **loop**-berechenbare Funktion ist.

Aufgabe 4 (9 PUNKTE)

Konstruieren Sie den zu folgendem deterministischen endlichen Automaten äquivalenten Minimalautomaten:



Aufgabe 5 (6 PUNKTE)

Sei $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ ein deterministischer endlicher Automat. Zeigen Sie, dass dann auch die Sprache $\{w \in L(M) \mid \text{bei der Berechnung } (s, w) \vdash_M^* (f, \varepsilon) \text{ werden mindestens die Hälfte der Zustände in } K \text{ erreicht}\}$ eine reguläre Sprache ist.

Aufgabe 6 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie mit Hilfe von Ogden's Lemma, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, i < j \text{ und } k < 2j\}$$

nicht kontextfrei ist. Betrachten Sie dazu beispielsweise $z = a^n b^{n+1} c^{2n+1}$ und markieren Sie alle b .

Aufgabe 7 (7 PUNKTE)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

- (a) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $\approx_L$.
- (b) Geben Sie $\Psi(L)$ an.

Aufgabe 8 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Sprache $\text{SET-SPLITTING} = \{\langle S, C \rangle \mid S \text{ ist eine endliche Menge und } C = \{C_1, \dots, C_k\} \text{ ist eine Familie von } k > 0 \text{ Teilmengen von } S \text{ und man kann die Elemente von } S \text{ jeweils weiß oder blau einfärben, so dass in keiner Teilmenge } C_i \text{ aus } C \text{ alle Elemente die gleiche Farbe haben}\}$ eine NP-harte Sprache ist, indem Sie NAE-3-SAT auf SET-SPLITTING reduzieren.

Aufgabe 9 (7 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Sprache $\text{CLIQUE-COVER} = \{\langle G = (V, E), k \rangle \mid V \text{ kann in } V_1, \dots, V_k \text{ partitioniert werden, so dass für alle } i = 1, \dots, k \text{ der durch } V_i \text{ induzierte Teilgraph von } G \text{ ein vollständiger Graph ist}\}$ eine NP-vollständige Sprache ist. Sie dürfen dazu alle Sprachen benutzen, von denen wir in der Vorlesung oder den Übungen zu Teil 1 oder 2 gezeigt haben, dass sie NP-vollständig sind.

Aufgabe 10 (9 PUNKTE)

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?

(1.5 Punkte für jede richtige Antwort, 0.5 Punkte Abzug für jede falsche.)

wahr falsch

- ☐ ☐ Falls $B \in \text{NPSpace}$ und $A \preceq_P B$, so gilt $A \in \text{PSPACE}$.
- ☐ ☐ Die Sprache $\{a^i b a^i \mid i \geq 0\}$ ist deterministisch kontextfrei.
- ☐ ☐ Es gibt deterministisch kontextfreie Sprachen, deren Schnitt nicht kontextfrei ist.
- ☐ ☐ $\text{PTAS} \subseteq \text{APX}$.
- ☐ ☐ Falls $P \neq NP$, so besitzt das Optimierungsproblem, die Knoten eines einfachen Graphen mit minimal vielen Farben zu färben, kein FPTAS.
- ☐ ☐ Für eine Boolesche Formel ϕ in konjunktiver Normalform, in der alle Klauseln aus höchstens drei Literalen bestehen, sei $\kappa(\phi)$ die Anzahl der in ϕ vorkommenden Variablen. Dann ist $(3\text{-SAT}, \kappa)$ festparameterhandhabbar.