

Grundlagen der Theoretischen Informatik 2

14. Februar 2023, 8:00 - 10:00 Uhr

OTTO VON GUERICKE
UNIVERSITÄT
MAGDEBURG

INF

Name, Vorname: _____

Bearbeitungszeit: 120 Min.

Matrikelnummer: _____

Zugelassene Hilfsmittel: Keine!

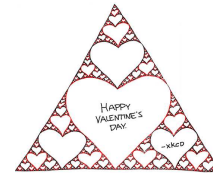
Anzahl Doppelbögen: _____

Gesamtzahl Aufgaben: 10

Gesamtpunktzahl: 64

Bitte jeden beschriebenen Doppelbogen mit Matrikelnummer und Namen beschriften! Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

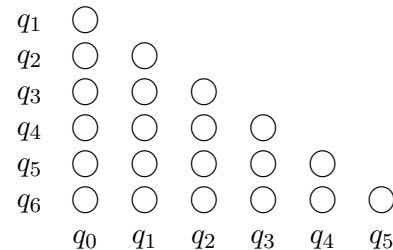
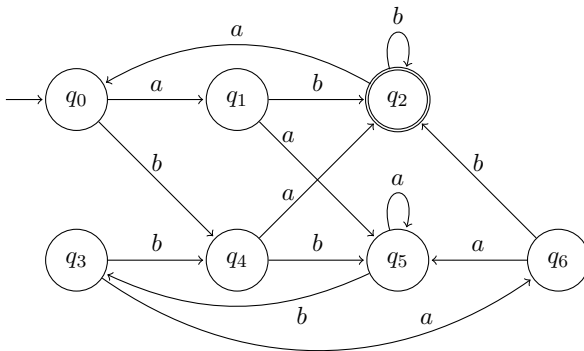


Aufgabe 1 (5 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $2np1 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $2np1(n_1) = 2n_1 + 1$ eine durch eine Grammatik berechenbare Funktion ist, indem Sie eine Grammatik angeben, die die Funktion $2np1$ berechnet.

Aufgabe 2 (7 PUNKTE)

Konstruieren Sie den zu folgendem deterministischen endlichen Automaten äquivalenten Minimalautomaten:



Aufgabe 3 (7 PUNKTE)

Die Fibonacci-Zahlen sind durch die Funktion $F : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ wie folgt definiert:

$$F(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & n \geq 2 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass F eine **while**-berechenbare Funktion ist.

Aufgabe 4 (6 PUNKTE)

Sei $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine primitiv rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion

$$f(n_1, n_2) = g^{n_2}(n_1) = \underbrace{g(\dots g(n_1) \dots)}_{n_2\text{-mal}}$$

eine primitiv rekursive Funktion ist, wobei $g^0(n_1) = n_1$.

Aufgabe 5 (5 PUNKTE)

Gehört das Optimierungsproblem, die Knoten eines einfachen Graphen mit minimal vielen Farben zu färben, zu FPTAS, falls $P \neq NP$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (6 PUNKTE)

Für eine Boolesche Formel ϕ in konjunktiver Normalform, in der alle Klauseln aus höchstens drei Literalen bestehen, sei $\kappa(\phi)$ = Anzahl der in ϕ vorkommenden verschiedenen Variablen. Zeigen Sie, dass $(NAE-3-SAT, \kappa)$ festparameterhandhabbar ist.

Aufgabe 7 (9 PUNKTE)

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr, welche falsch (jeweils ohne Beweis!)?

(1.5 Punkte für jede richtige Antwort, 0.5 Punkte Abzug für jede falsche.)

wahr falsch

- ☐ ☐ Jede durch eine Grammatik berechenbare Funktion ist auch **loop**-berechenbar.
- ☐ ☐ Es gibt reguläre Sprachen, deren Vereinigung nicht deterministisch kontextfrei ist.
- ☐ ☐ Für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gibt es eine endliche Menge $T_L \subset \Sigma^*$ von Wörtern, so dass für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt

$$x \approx_L y \text{ g.d.w. } \forall \gamma \in T_L \ (x\gamma \in L \Leftrightarrow y\gamma \in L)$$

- ☐ ☐ Für jedes $L \in PSPACE$ gilt $L \preceq_P TQBF$.
- ☐ ☐ Falls $P \neq NP$, so gilt $NP \subseteq PSPACE$.
- ☐ ☐ Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Quotientenbildung.

Aufgabe 8 (7 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass die Sprache $LONGEST-SIMPLE-CYCLE = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ ist ein einfacher ungerichteter Graph, der einen einfachen Kreis mit mindestens } k \text{ Knoten besitzt}\}$ eine NP-vollständige Sprache ist. Sie dürfen dabei alle Sprachen benutzen, von denen wir in den Vorlesungen oder den Übungen zu Grundlagen der Theoretischen Informatik nachgewiesen haben, dass sie NP-vollständig sind.

Aufgabe 9 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie, dass sich die Sprache $MULTICOLORED-CLIQUE = \{\langle V_1, \dots, V_k, E \rangle \mid \text{im Graphen } G = (V, E) \text{ mit } V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k \text{ gibt es eine Knotenmenge } V' \subseteq V, \text{ die in } G \text{ eine Clique der Größe } k \text{ bildet, so dass } |V' \cap V_i| = 1 \text{ für } i = 1, \dots, k\}$ in Polynomialzeit auf die Sprache $CLIQUE = \{\langle G, k \rangle \mid \text{Graph } G \text{ besitzt eine Clique der Größe } k\}$ reduzieren lässt. Geben Sie eine geeignete Reduktionsfunktion an und weisen Sie nach, dass sie die Anforderungen erfüllt.

Hinweis: Gesucht ist bei $MULTICOLORED-CLIQUE$ also eine Clique, die aus jedem V_i genau einen Knoten enthält. Wenn wir die V_i als Menge der Knoten ansehen, die in Farbe i gefärbt sind, ist also eine Clique gesucht, in der jede der k Farben genau einmal vorkommt. Welche Eigenschaft besitzen die Kanten in einer solchen Clique? Konstruieren Sie zu einem bunten Graphen $G = (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k, E)$ einen Graphen $\tilde{G}$, der genau dann eine Clique der Größe k besitzt, wenn der bunte Graph eine allfarbige Clique der Größe k besitzt.

Aufgabe 10 (6 PUNKTE)

Zeigen Sie mit Hilfe von Ogden's Lemma, dass die Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, i < j \text{ und } k < 2j\}$$

nicht kontextfrei ist. Betrachten Sie dazu beispielsweise $z = a^n b^{n+1} c^{2n+1}$ und markieren Sie alle b .